24.12.2015

СБОРНИК ЗАДАЧ

Геометрические задачи на ОГЭ и ЕГЭ

В сборнике задач собраны, разбиты по темам и решены несколькими способами задачи планиметрии из различных «Типовых тестовых заданий», а также тренировочных вариантов с сайта А.А. Ларина.

Сборник составила Корогодова А.Б. учитель математики г. Советский ХМАО.
Электронный адрес: korogodova.anna47@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Планиметрические задачи на ЕГЭ

ЧАСТЬ В

1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2м и 5м.

2. В треугольнике OBH точка M делит сторону OB на отрезки $OM = 4$ и MB = 28, ∠OHM = ∠ OBH. Найдите площадь треугольника OHM, если $\angle O = 45^\circ$.

3. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания. (2003 г., вариант 2)

4. Точка H лежит на стороне AO треугольника AOM. Известно, что $AH = 4$, $OH = 12, \angle A = 30^\circ, \angle AMH = \angle AOM$. Найдите площадь треугольника AMH.

5. На стороне CK треугольника CEK отмечена точка M так, что $CM = 8, MK = 16, \angle CEM = \angle CKE$. Найдите площадь треугольника EMC, если $\angle C = 60^\circ$.

6. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

7. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $2\sqrt{15}$, а основания равны 5 и 8. Найдите диагональ трапеции.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = 3OC$. Площадь треугольника AOD равна 36. Найдите площадь трапеции.

9. Диагонали трапеции $KMPT$ с основаниями MP и KT пересекаются в точке C. Площадь треугольника MCP равна 4, $KT = 2MP$. Найдите площадь трапеции.

10. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

11. Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. Найдите меньшее основание трапеции.

12. Площадь треугольника АВС равна $20\sqrt{3}$. Найдите АС, если сторона АВ равна 8 и она больше половины стороны АС, а медиана ВМ равна 5. (Демовариант_03)

13. Найти площадь треугольника КМР, если сторона КР равна 5, медиана РО равна 3 √2, ∠КОР = 135°.

14. В треугольнике ВСЕ медиана ВМ равна 3, СЕ = 4 √2, ВЕ = 5. Найти сторону ВС.

15. В трапеции КМРТ с основаниями МР и КТ диагонали пересекаются в точке С. Площадь треугольника МСР равна 4, КТ = 2 МР. Найти площадь трапеции.

16. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

17. В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найти площадь трапеции.

18. Диагонали трапеции ABCD (AB || CD) пересекаются в точке M. Площадь треугольника ADM равна 12, DM = 2 BM. Найти площадь трапеции.

19. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если AC = $3\sqrt{2}$, BC = 10, $\angle MAC = 45°$.

20. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. найдите длину отрезка CK.

21. В ромбе ABCD из вершины тупого угла B проведена высота BH к стороне AD. Она пересекает диагональ AC в точке M. Сторона ромба равна 15, а его площадь равна 135. Найдите площадь треугольника AMH.

22. В прямоугольном треугольнике ABE с прямым углом E проведена биссектриса BT, причем AT = 15, TE = 12. Найдите площадь треугольника ABT.

23. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь CKH.

24. Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

25. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её средняя линия равна 4, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

26. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ равная 13, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

27. Равнобедренная трапеция описано около окружности радиуса $3\sqrt{5}$. Найдите тангенс угла при большем основании трапеции, если её средняя линия равна 15.

28. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 3, если тангенс угла при основании трапеции равен $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

29. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

30. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 20. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BD и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника BKH, если AH = $4\sqrt{2}$.

31. Сторона правильного шестиугольника равна $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. Найдите сторону равновеликого ему правильного треугольника.

32. Сторона правильного треугольника равна $6\sqrt{6}$. Найдите сторону равновеликого ему правильного шестиугольника.

33. В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если DM = 12, CM = 15, AM = 16.

34. (ДВ)Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K − середины сторон AB, CD, EF соответственно.

35. Точка M лежит на стороне AB треугольника ABC. Известно, что AM = 2, BM = 16, $\angle A = 30°$, $\angle ACM = \angle ABC$. Найти площадь треугольника AMC.

36. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC. Известно, что BK = 1, KC = 15 , $\angle B = 30°$, $\angle BAK = \angle ACK$. Найти площадь треугольника BAK.

37. В трапеции ABCD диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если C = $18\sqrt{10}$, BE = $6\sqrt{10}$.

38. В выпуклом четырехугольнике MNLQ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс угла при вершине M равен $\frac{2}{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон NL и MQ, если известно, что сторона LQ втрое меньше стороны MN и на 2 меньше стороны NL.

39. Высота равнобедренной трапеции равна 12; её средняя линия равна 16. Найти периметр трапеции, если известно, что её диагональ перпендикулярна боковой стороне.

40. (ДВ) В трапеции *ABCD* диагональ *AC* является биссектрисой угла *A*. Биссектриса угла *B* пересекает большее основание *AD* в точке *E*. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$,
$BE = 4\sqrt{5}$.

41. (Реальный экзамен) В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр параллелограмма, если DK = 12, PK = 18, BP = 15.

42. (ДВ) На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята точка D, что AD = 2 и BD = 1. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

43. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что BD : DC = 1: 2. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

II. Тематический сборник задач

1.1. Треугольник

1.1.1. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

1.1.2. В треугольнике OBH точка M делит сторону OB на отрезки $OM = 4$ и MB = 28, ∠OHM = ∠OBH. Найдите площадь треугольника OHM , если $\angle O = 45^\circ$.

1.1.3. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.

1.1.4. Точка H лежит на стороне AO треугольника AOM . Известно, что $AH = 4$, OH = 12, ∠A = 30° $OH = 12, \angle A = 30^\circ, \angle AMH = \angle AOM$. Найдите площадь треугольника AMH .

1.1.5. На стороне CK треугольника CEK отмечена точка M так, что CM = 8, MK = 16, $\angle CEM = \angle CKE$. Найдите площадь треугольника EMC, если $\angle C = 60^\circ$.

1.1.6. (Свойство равнобедренного треугольника, средняя линия треугольника)
В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через D, пересекает AC в точке E. (ГИА ТВ № 6 от А. Ларина)

1.1.7.(Средняя линия треугольника, теорема Фалеса)
Точки K и L лежат на стороне AC треугольника ABC. Прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части. Найти длину стороны AC, если KL = 6.

1.1.8.Найдите величины углов треугольника ABC, если известно, что медиана AM в 4 раза меньше стороны BC, а треугольник ABM – равнобедренный.

1.1.9. Площадь равнобедренного треугольника ABC (AB =BC) равна 36. Найдите длину стороны AC, если BC = $\sqrt{97}$.

1.1.10. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу треугольника, подобного данному, если один из катетов равен 10.

1.1.11. (ЕГЭ-2012) На прямой, содержащей медиану треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удалённая от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если BC = 6, AC = 4.

1.1.12.(ГИА)Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30 и 90°.

1.1.13. (ТВ № 9-2012 от А.Л.)Все вершины квадрата лежат на сторонах равнобедренного треугольника ABC, основание AC которого равно 12, а боковая сторона AB равна 10. Найдите сторону квадрата.

1.1.14.(ТВ №10 2012 от А.Л.) В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

1.1.15. (ТВ№37-2013, А. Ларин.) В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

1.2. Медианы треугольника

1.2.1. (2010) Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 3, BC = 4, а медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.

1.2.2.(2003) Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5. (Демовариант_03)

1.2.3.Найти площадь треугольника KMP, если сторона KP равна 5, медиана PO равна $3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135°$.

1.2.4. (Демовариант_2005)В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, BC = 10, $\angle MAC = 45°$.

1.2.5. (2010) Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.

1.2.6. (2010г.) В треугольнике *ABC* на стороне *BC* выбрана точка *D* так, что BD : DC = 1 : 2.. Медиана *CE* пересекает отрезок *AD* в точке *F*. Какую часть площади треугольника *ABC* составляет площадь треугольника *AEF*?

1.2.7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы CC_1 и BB_1 перпендикулярны друг другу. Найдите длину большей из этих медиан, если длина третьей медианы $AA_1 = 3\sqrt{3}$.

1.2.8. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?.

1.2.9. Точки K и L лежат на стороне AC треугольника ABC. Прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части. Найти длину стороны AC, если KL = 6.

1.2.10. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\frac{MH}{BH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

1.3. Биссектриса треугольника

1.3.1.В прямоугольном треугольнике ABE с прямым углом E проведена биссектриса BT, причем AT = 15, TE = 12. Найдите площадь треугольника ABT.

1.3.2. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь CKH.

1.3.3. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 20. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BD и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника BKH, если $AH = 4\sqrt{2}$.

1.3.4. (, 2010г) В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если *AC* = 6, *AE* = 2, *CD* = 3.

1.3.5. В треугольнике ABC, площадь которого S, биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке F. Найдите площадь четырехугольника ADEF, если BC = *a,* AC = b.

1.3.6. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен α, сторона *BC* равна a, *P*— точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BPC*.

1.3.7. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определите периметр треугольника ABC.

1.3.8. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что AD = 10, $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.3.9. В равнобедренном треугольнике ABC, в котором AB = BC = 10, AC = 16, найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис.

1.3.10. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

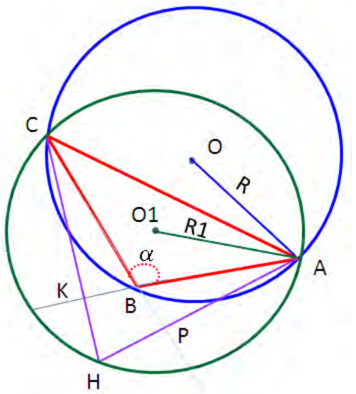
1.3.11. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если *AC* = 6, *AE* = 2, *CD* = 3.

1.3.12. В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\frac{MK}{KL} = \frac{1}{2}, \frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$ а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

1.4. Высоты треугольника

1. *Точка пересечения высот треугольника называется – ортоцентром.*
2. *Если H – ортоцентр треугольника, то точки A, B и C – точки пересечения высот треугольников ABH, BCH, ACH.*
3. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*
4. *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).*

Доказательство п.3:



1)Пусть O – центр окружности, описанной около ΔABC, а R – радиус описанной около треугольника ΔABC окружности.

По теореме синусов $2R = \frac{AC}{sinB} = \frac{AC}{sin\alpha}$, $R = \frac{AC}{2\,sin\alpha}$.

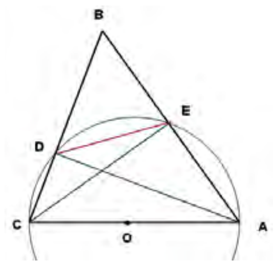
2)H – точка пересечения высот ΔABC, O_1 – центр окружности, описанной около ΔAHC, а R_1 – радиус описанной около этого треугольника окружности. Тогда $2R_1 = \frac{AC}{sin\angle H}$;

3)В четырёхугольнике HKBP $\angle K = \angle P = 90°$, тогда $\angle H + \angle PBK = 180°$, $\angle H = 180° - \angle PBK = 180° - \alpha$

$2R_1 = \frac{AC}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{AC}{sin\alpha}$, $R_1 = \frac{AC}{2\,sin\alpha}$.

Получили, что $R = \frac{AC}{2\,sin\alpha} = R_1$.

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 1



D и E основания высот AD и CE ΔACB.
Доказать, что ΔABC ~ Δ DEB

Доказательство

1 способ: $\angle$ B – острый. Так как точки D и E – основания высот, то ΔACD и ΔACE - можно вписать в окружность с диаметром AC.

$\angle DAC = \angle DEC$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CD.

$\angle DCA = 90° - \angle DAC$; $\angle DEB = 90° - \angle DEC$ $\Rightarrow$ **$\angle DCA = \angle DEB$** и **$\angle BDE = \angle BAC$** $\Rightarrow$ ΔABC ~ Δ DEB по двум углам.

2 способ: ΔABE и Δ ADB - прямоугольные, $\cos\angle B = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$. Тогда по углу B и двум пропорциональным сторонам *ΔABC ~ Δ DEB*

1.4.1. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

1.4.2. (2010) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что *CH* = *AB*. Найдите угол *ACB*.

1.4.3. Точки A_1, B_1, и C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60°, 30°. Найдите углы треугольника ABC.

1.4.4. Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

1.4.5. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен α, сторона *BC* равна *a*, *H* — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BHC*.

1.4.6. (Свойство высот, подобие треугольников) В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами AB = BC = 4 и AC = 2 проведены высоты AA1 и BB1. прямая A1B1 пересекает прямую AB в точке K. Найдите длину AK.

1.4.7. (Опорная задача, свойство высот) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

1.4.8. В остроугольном треугольнике PQR, сторона PR которого равна 12, на стороны QR и PQ опущены высоты PM и RN. Вычислить площадь четырехугольника PNMR, если известно, что площадь треугольника NQM равна 2, а радиус окружности, описанный около треугольника PQR равен $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

1.4.9. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

1.4.10. AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC . Угол A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 36^0, а угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 84^0. Найдите угол C треугольника ABC .

1.4.11. (ТВ№28-2013, А. Ларин.) Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если BC = 8, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4.

2.1. Параллелограмм

2.1.1. (Реальный экзамен) В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр параллелограмма, если DK = 12, PK = 18, BP = 15.

2.1.2. В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M и прямую AB в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если DM = 12, CM = 15, AM = 16.

2.1.3. (2010) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны AB = a, BC = b и $\angle BAD = \alpha$ Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

2.1.4. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

2.1.5. Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle$A = 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

2.1.6. В параллелограмме ABC биссектрисы углов при сторона AD делят сторону BC точками M и N так, что BM : MN = 3 : 8. Найдите BC, если AB = 5.

2.1.7. Внутри параллелограмма ABCD взята точка K, равноудаленная от прямых AD, AB, CD. Перпендикуляр, опущенный из вершины D на сторону AB, пересекает отрезок AK в точке M. Найдите площадь параллелограмма, если DK = 2 см, AM : MK = 8 : 1, DC = 3 BC.

2.1.8. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60° . На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

2.1.9. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма ABCD

2.1.10. Найти площадь параллелограмма ABCD со сторонами AB = 2 и BC = 3, если диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой стороны AD .

2.1.11. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

2.2. Ромб.
Прямоугольник. Квадрат.

2.2.1. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. найдите длину отрезка CK.
2.2.2. В ромбе ABCD из вершины тупого угла B проведена высота BH к стороне AD. Она пересекает диагональ AC в точке M. Сторона ромба равна 15, а его площадь равна 135. Найдите площадь треугольника AMH.

2.2.3. (2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

2.2.4. (2010) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α,
$tg\,\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

2.2.5. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

2.2.6. (2010) Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят AD на три равные части. Найдите $\sin(\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB)$.

2.2.7. Дан квадрат ABCD. На стороне AB лежит точка K, на стороне BC - точка L, на стороне CD –точка M. Четырехугольник AKLM – равнобедренная трапеция. Найти сумму оснований трапеции, если AK = 5 и MD = 2.

2.2.8. (см. 2.2.4.)Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$,пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна8.

2.2.9. (см. 2.2.4.)Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата ABCD, пересекает прямые CD и AD в точках M T и соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата ABCD равна 8.

2.2.10. (ТВ№10 2012 от А.Л.)Точка K делит диагональ AC квадрата ABCD в отношении 1:3. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.

2.2.11. (ТВ№32-2013, А. Л.) В ромбе ABCD со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

2.2.12. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ABP , проведённую из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

2.2.13. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равнобедренный прямоугольный треугольник CPD с гипотенузой CD. Найдите высоту треугольника ABP , проведённую из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

2.3. Трапеция, четырехугольник

2.3.1. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

2.3.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = 3OC$. Площадь треугольника AOD равна 36. Найдите площадь трапеции.

2.3.3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. Найдите меньшее основание трапеции.

2.3.4. В трапеции KMPT с основаниями MP и KT диагонали пересекаются в точке C. Площадь треугольника MCP равна 4, KT = 2 MP. Найти площадь трапеции.

2.3.5. В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найти площадь трапеции.

2.3.6. Диагонали трапеции ABCD (AB || CD) пересекаются в точке O. Площадь треугольника ADO равна 12, DO = 2 BO. Найти площадь трапеции.

2.3.7. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её средняя линия равна 4, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2.3.8. В трапеции ABCD диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если
$AC = 18\sqrt{10}$, $BE = 6\sqrt{10}$.

2.3.9. В выпуклом четырехугольнике MNLQ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс угла при вершине M равен $\frac{2}{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон NL и MQ, если известно, что сторона LQ втрое меньше стороны MN и на 2 меньше стороны NL.

2.3.10. Высота равнобедренной трапеции равна 12; её средняя линия равна 16. Найти периметр трапеции, если известно, что её диагональ перпендикулярна боковой стороне.

2.3.11. (ДВ) В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$,
$BE = 4\sqrt{5}$.

2.3.12. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

2.3.13. (2010) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos \angle DEC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

2.3.14. В трапеции ABCD известны боковые стороны AB = 27, CD = 28 и верхнее основание BC = 5. Известно, что $\cos\angle DCB = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

2.3.15. (2010) В трапеции *ABCD* биссектриса угла *A* пересекает боковую сторону *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ABE*, если площадь трапеции равна *S*, $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$ ($c < a$).

2.3.16. (2010) Боковая сторона *AB* трапеции *ABCD* равна *l*, а расстояние от середины *CD* до прямой *AB* равно *m*. Найдите площадь трапеции.

2.3.17. На боковых сторона AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем HQ || AD. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции. площади которых относятся как 1:2. Найдите PQ, если AD = *a* и BC = *b*.

2.3.18. (2010) Основания трапеции равны *a* и *b*. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

2.3.19. Сторона правильного шестиугольника равна $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. Найдите сторону равновеликого ему правильного треугольника.

2.3.20. (ДВ) Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K − середины сторон AB, CD, EF соответственно.

2.3.21. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника ABCD. Известно, что OC = OD и что O одинаково удалена от прямых AB, BC и AD. Найдите углы четырехугольника, если $\angle AOB = 110°$ и $\angle COD = 90°$.

2.3.22. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции ABCD. Известно, что $\angle ACD = \angle CBD = \angle ABM = \arccos\frac{5}{6}$ и AB = 9. Найти BM.

2.3.23. Во вписанном четырехугольнике ABCD точка X лежит на стороне AD, причем BX || CD и CX || BA. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и DX = 6.

2.3.24. В трапеции ABCD углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $\frac{BN}{NC} = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найти $\frac{AM}{MD}$.

2.3.25. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол 60°. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка соединяющего середины оснований.

2.3.26. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

2.3.27. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 и основанием BC = 5. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

2.3.28. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

2.3.29. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна ее площадь?

2.3.30. Площадь трапеции ABCD равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

2.3.31. (2010) Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 36, *CD* = 34 и верхним основанием BC = 10 . Известно, что $\cos\angle DEC = -\frac{1}{3}$. Найдите *BD*.

2.3.32. Площадь трапеции ABCD равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

2.3.33. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 и основанием BC = 5. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

2.3.34. (Реальный ГИА_2013, В_1318) В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основание BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 4. Найдите площадь трапеции.

2.3.35. (ТВ№1-2013 от А.Ларина.) В трапеции KLMN известны боковые стороны KL = 36, MN = 34, верхнее основание LM = 10, и $\cos\angle KLM = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ LN.

2.3.36. (ТВ№19-2013 от А.Л.) Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1 : 3.

2.3.37. (ТВ№20-2013 от А.Ларина.) Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20 градусов больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

2.3.38. (ТВ№38-2013, А. Ларина.) Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

2.3.39. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20°больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.

2.3.40. (И.В Ященко, А.С. Шестаков, 30 в. 2013г) Найдите площадь трапеции, если её диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2.

2.3.41. (И.В Ященко, А.С. Шестаков, 30 в. 2013г) Углы при одном из оснований трапеции равны 19° и 71°, а отрезки соединяющие середины противоположных сторон, равны 12 и 10. Найдите основания трапеции.

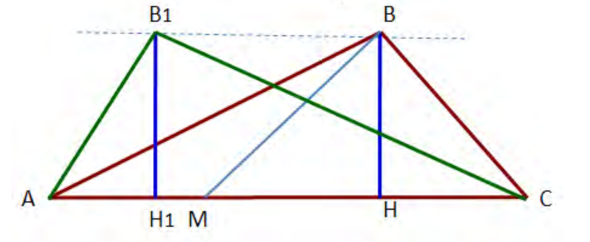
2.3.42. (И.В Ященко, А.С. Шестаков, 30 в. 2013г) Углы при одном из оснований трапеции равны 23° и 67°, а отрезки соединяющие середины противоположных сторон, равны 15 и 8. Найдите основания трапеции.

3.1. Отношение отрезков и площадей в треугольнике

- *Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*
- *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*
- *Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольника.*
- *Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).*
- *Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведению сторон этого угла.*
- *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.*
- *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*
- *Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.*

Опорные задачи:

- *Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.*
- *Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.*
- *. Площади треугольников имеющх равные основания и равные высоты равны;*
- *.Отношение площадей имеющих равные высоты равно отношению их оснований.*



Доказательство.

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{1}{2}AC\cdot BH}{\frac{1}{2}MC\cdot BH} = \frac{AC}{MC}$;

Аналогично $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{1}{2}AM\cdot BH}{\frac{1}{2}MC\cdot BH} = \frac{AM}{MC}$;

3.1.1. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.

3.1.2.(ЮФМЛ г Ханты - Мансийск) В треугольнике ABC точка D на стороне AB, точка F на стороне AC, точки G и E на стороне BC расположены, что $AD : DB = 1 : 3$, $AF : FC = 3 : 7$ и $DE \parallel AC$, $GF \parallel AB$. Отрезки DE и FG пересекаются в точке H. Найти отношение $DH : HE$.

3.1.3. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC точка D на стороне BC и точка F на стороне AC расположены так, что $BD : DC = 3 : 2$, $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки AD и BF пересекаются в точке P.   Найти отношение $AP : PD$.

3.1.4. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC расположены точки M, N, K соответственно так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 1 : 2$. Отрезки AN, BK, CM пересекают друг друга в точках P, Q, R. Доказать, что площадь треугольника PQR в 7 раз меньше площади треугольника ABC.

3.1.5. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC, площадь которого равна S, точка M середина стороны BC, точка N на продолжении стороны AB и точка K на продолжении стороны AC выбраны так, что AN =$\frac{1}{2}AB$, CK = $\frac{1}{2}AC$. Найдите площадь треугольника MNK.

3.1.6. (ЮФМЛ) В треугольнике ABC точка M на стороне AB расположена так, что $AM:MB=1:2$. Через точку M проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке K и луч BC в точке N. Найти отношение $AK:KC$, если известно, что площади треугольников BMN и ABC равны.

3.1.7. Прямая пересекает сторона AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырёхугольника MCBP, если AP : PB = 5 : 4, AM : MC = 3 : 5.

3.1.8. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD : CD = 3 : 2. Найдите площадь чтырёхугольника EDCK.

3.1.9. Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины B в отношении 5 : 4, считая от вршины B. В каком отношении, считая от вершины C, эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины C?.

3.1.10. Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины C в отношении 7 : 2 , считая от вршины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины A?.

3.1.11. (Реальный ГИА_2013, В_1301) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к плошади четырехугольника KPCM.

3.1.12. (ТВ№2 от А.Ларина. 2012 г) В треугольнике ABC на прямой BC выбрана точка K так, что BK:KC=1:2. Точка E – середина стороны AB. Прямая CE пересекает отрезок AK в точке P. Найдите площадь треугольника AEP, если площадь треугольника ABC равна 120.

3.1.13. (ТВ№5-2012 от А.Ларина.) В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка K так, что AK : KB = 3 : 5. На прямой AC взята точка E так, что AE = 2CE. Известно, что прямые BE и CK пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BOC равна 20.

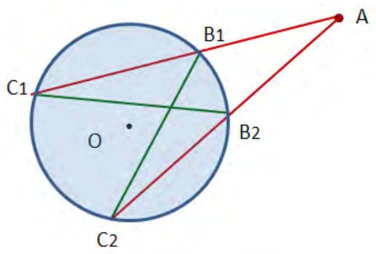
3.1.14. (ТВ№36-2013, А. Ларина.) В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка K так, что AK:KB=3:5. На прямой AC взята точка E так, что AE=2CE. Известно, что прямые BE и CK пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BOC равна 20.

3.1.15. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D, а на стороне AB – точка K, так, что BD : DC = 1 : 2 и BK : KA = 4 : 1. Отрезки AD и CK пересекаются в точке E. Найти отношение площадей треугольников KBD и KDE.

4.1. Окружность.

- *Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается;*
- *Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, заключенной между ними.*
- *Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.*
- *Отрезки касательных прямых к окружности равны.*
- *Пусть через точку A проведена касательная AB к окружности (B – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в двух точках P и Q. Тогда $AB^2 = AP \cdot AQ$.*
- *Пусть через точку A проведены секущие к окружности, пересекающие её в точках первая B_1 и C_1, а другая – B_2 и C_2. Тогда $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 1



Доказательство:
$\Delta AC_1B_2 \sim \Delta AC_2B_1$ по двум углам: $\angle AC_1B_2 = \angle AC_2B_1$ как углы, опирающиеся на дугу B_1B_2. $\angle C_1B_1C_2 = \angle C_1B_2C_2$ как углы опирающиеся на дугу C_1C_2, а следовательно равны углы, дополняющие их до 180°, т.е. $\angle AB_2C_1 = \angle AB_1C_2$.

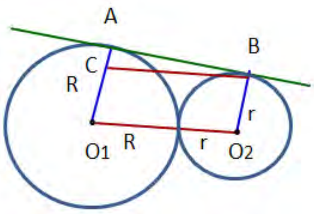
Тогда $\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$ или

$$\mathbf{AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2.}$$

Взаимное расположение окружностей:

- *При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.*
- *При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.*
- *Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 2



Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{R \cdot r}$.
Доказательство:
Отрезок $CB = O_1O_2 = R + r$, Отрезок $AC = R - r$, тогда
$AB = \sqrt{CB^2 - AC^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4R \cdot r} = 2\sqrt{R \cdot r}$.
$\boldsymbol{AB = 2\sqrt{R \cdot r}}$.

Окружность, касательные, секущие и хорды:

- *Радиус (диаметр), перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.*
- *Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.*
- *Общая хорда двух пересекающихся окружностей, перпендикулярна линии центров и делится ею пополам*

ОКРУЖНОСТЬ

4.1.1. (2010) Дана окружность и точка M. Точки A и B лежат на окружности, причем A – ближайшая к M точка окружности, а B – наиболее удаленная от M точка окружности. Найдите радиус окружности, если $MA = a$ и $MB = b$.

4.1.2. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

4.1.3. Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

4.1.4. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

4.1.5. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

4.1.6. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

4.1.7. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и . $R + r < a$ Найдите AB.

4.1.8. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R > r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = a$.

4.1.9. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120°$ Найдите радиус окружности, вписанной в угол $\angle ADC$ и касающейся дуги AC, если $OD = \sqrt{3}$.

4.1.10. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

4.1.11. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

4.1.12. (2010) Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

4.1.13. (2010) Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4.1.14. (ДВ) На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

4.1.15. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой. Найдите радиус окружности, касающийся каждой из двух данных и той же прямой.

ОКРУЖНОСТЬ

4.1.16. На стороне АС угла АВС, равного 45°, взята такая точка D, что CD = AD = 2. Найдите радиус окружности, проходящей через точки А и D, и касающейся прямой ВС.

4.1.17. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

4.1.18. Две окружности касаются друг друга в точке К . Продолжение хорды АВ первой окружности касается второй окружности в точке М . Найдите АК , если ВК = 12 , АМ = 24 , ВМ = 18 .

4.1.19. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

4.1.20. В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда АВ = 8 . Точка С лежит на хорде АВ так, что АС : ВС = 1 : 2. Найдите радиус окружности, касающийся данной окружности и касающейся хорды АВ в точке С.

4.1.22. Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

4.1.22. На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причем $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

4.1.23. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

4.1.24. (ЮФМЛ) В окружности с центром О на хорде АВ расположены точки М и К, так что АМ : МК = 2 : 3, МК : КВ = 9 : 1. Известно, что ОМ = 6, ОК = 9. Найти радиус окружности.

4.1.25. (ЮФМЛ) Окружность радиуса R касается сторон угла, величина которого равна 2α. Найдите радиусы окружностей, каждая из которых касается заданной окружности и сторон угла.

4.1.26. (ЮФМЛ) Хорды АС и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке К. Известно, что $BC = 2\sqrt{5}$, СК= 4, DК = 22. Найдите периметр четырёхугольника ABCD.

4.1.27. (ТВ№6-2013 от А.Л.) В системе координат задана точка $M\ (x;\ y)$, $x > 0$, $y > 0$. Дана окружность с центром в точке M радиуса r, причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку O(0;0) и через точку M, пересекает окружность в точках K и P, причем ордината точки K меньше, чем ордината точки P. Прямая, которая касается окружности в точке K, пересекает прямые $x = 0$ и $y = 0$ в точках A и В. Найдите площадь треугольника BOK .

4.1.28. (ТВ№15-2013 от А.Л.) Точка В – середина отрезка АС, причем АС = 6 . Проведены три окружности радиуса 5 с центрами А, В и С. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.

4.1.29. (ТВ№16-2013 от А.Ларин.) В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL, PS пересекаются в точке С, хорды KL, MN пересекаются в точке А, хорды MN и PS пересекаются в точке В, причем AL = CK , AM= BN , BS = 5 , BC = 4 . Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна 45 градусов.

4.1.30. (ТВ№18-2013 от А.Л.) Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке М и пересекает вторую окружность в точках А и В . Найдите радиус первой окружности, если известно, что АВ = 12, МВ = 6, а радиус второй окружности равен 10.

4.1.31. (ТВ№33-2013, А. Л.) Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B - точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

4.1.32. (ТВ№34-2013, А. Л.) Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков AM = 28, MB = 4, а радиус большей окружности равен 20.

4.1. 33. (ЕГЭ 2013 Сибирь) Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 – параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

4.1.34. . (ЕГЭ Урал) Окружности радиусов 2 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке L. Прямая, проходящая через точку L вторично пересекает меньшую окружность в точке К, а большую – в точке M. Найдите площадь треугольника KMO_1, если $\angle LMO_2 = 15.°$

4.1.35. (ЕГЭ Восток) Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке К. MO_1 и NO_2 – параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle MO_1O_2 = 120.°$. Найдите MN.

4.1.36. (ЕГЭ Центр) Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30.°$

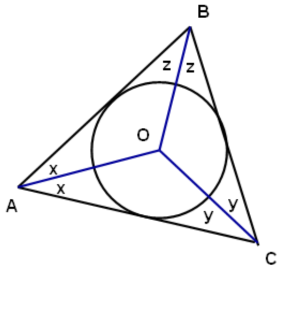
4.1.37. Досрочный 24.04.2013

Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

4.2. Окружность и треугольник
на ГИА

1. *Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис*
2. *Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.*
3. *Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной окружности.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 3

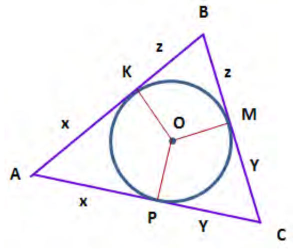


Если O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то выполняются равенства:

$\angle AOC = \dfrac{\angle B}{2} + 90°$; $\angle BOC = \dfrac{\angle A}{2} + 90°$; $\angle AOB = \dfrac{\angle C}{2} + 90°$;

$x + y + z = 90°$, $x + y = 90° - z$, $\angle AOC = 180° – (x + y) = 180° - 90° + z = z + 90°$, $\angle AOC = \dfrac{\angle B}{2} + 90°$;

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 4



Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

$P_{ABC} = 2x + 2y + 2z$, $z = \frac{P_{ABC} - 2(x+y)}{2} = \frac{AB+BC+AC-2\,AC}{2} = \frac{AB+BC-AC}{2}$.

То есть, получим формулы для вычисления

расстояния от вершины треугольника до точки касания:

$$BK = BM = \frac{AB+BC-AC}{2}; \quad CP = CM = \frac{BC+AC-AB}{2};$$

$$AK = AP = \frac{AB+AC-BC}{2}$$

4.2.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2м и 5м.

4.2.2. Противолежащая основанию вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 6 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

4.2.3. Через центр O окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P и продолжение отрезка BC в точке Q так, что точка C лежит между точками B и Q. Вычислить длину отрезка BP, если AB = 4 см, BC = 3см, B Q = 5 см.

4.2.4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 6, а длина катета BC равна 8. Точка D делит гипотенузу AC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ABD и в треугольник BCD.

4.2.5. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На стороне AB взята точка K так, что $AK = \frac{1}{2}AC$. Найти BK, если расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до стороны AC равно *a*.

4.2.6. Хорда *AB* стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка *C* лежит на этой дуге, а точка *D* лежит на хорде *AB*. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника *ABC*.

4.2. 7. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

4.2.8. (ЮФМЛ) В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен 1, расстояние от её центра до вершины C равно $\sqrt{5}$, а сумма сторон AC и BC равна 8. Найдите площадь треугольника.

4.2.9. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2014г) Точка D является основанием высоты, проведённой из вершины тупого угла A треугольника ABC к стороне BC. Окружность с центром в точке D и радиусом DA пересекает прямые AB и AC в точках P и M, отлтчных от A, соответственно. Найдите AC, если AB = 4, AP = 2, AM = 2.

4.2.10. (ЮФМЛ) Известно, что в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C, середина стороны BC и точка пересечения высот расположены на одной окружности. Найти косинусы углов треугольника ABC.

4.2.11. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC проведена биссектриса BL и построена окружность, которая проходит через точки B и L, касается стороны AC и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Доказать, что отрезок MN всегда параллелен AC.

ОКРУЖНОСТЬ

4.2.12. (ЮФМЛ) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если AC $=\sqrt{15}$, PQ = 1.

4.2.13. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4.2.14. (Реальный ГИА_2013, В_1310) Из вершины прямого угла C проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 12 см, тангенс угла ABC равен 2,4. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4.2.15. (Реальный ГИА_2013, В_1309) Из вершины прямого угла C проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4.2.16. (Реальный ГИА_2013, В_1313 Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей строну BC в её середине. Длина стороны
AC равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

4.2.17. (*ТВ № 5* _2014 от А.Ларина.) В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 6, а длина катета BC равна 8. Точка D делит гипотенузу AC пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ABD и в треугольник BCD.

4.2.18. (ТВ № 11_2014 от А.Ларина*.)* Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 56°. Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части. Найдите градусную меру большей из этих частей.

4.2.19. (ТВ № 12_2014 от А.Ларина.) Один из катетов прямоугольного треугольника равен , а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

4.2.20. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) . Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника – BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник ABC.

4.2.21. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника – BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 5 и 12 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник ABC.

4.2.22(С4. ТВ № 68_2014г от А.Ларина)
В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 и 0,8.
а) Докажите подобие треугольников ACD и BCD, ACD и ABC
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC

4.2.23. . (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC сторона AB на 6 больше стороны BC. Медиана BE делит треугольник на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE.

4.2.24. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC . В каком отношении точка касания делит катет AC, считая от вершины A?

4.2.25. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Через точку D основания равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E. Найдите AC, если CE = 3 и DE = DC.

4.2.26. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) В треугольнике KLM угол L тупой, а сторона KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины К, м и точку пересечения высот треугольника KLM.

4.2.27. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC угол B равен 120°, а длина стороны AB на $7\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC.

4.2.28. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC угол B равен 120°, а длина стороны AB на $2\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC.

4.2.29. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC сторона AB на 4 больше стороны BC. Медиана BE делит треугольник на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE.

4.3. Окружность и треугольник на ЕГЭ

4.3.1. (2010) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

4.3.2. (2010) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

4.3.3. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

4.3.4. (2010) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка D - середина гипотенузы. Точка $C1$ симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол . AC_1B

4.3.5. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O - центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Известно, что $BC = 12$, $MN = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

4.3.6. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

4.3.7. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении 1: 2 . Найдите углы треугольника AMB.

4.3.8. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.

4.3.9. В треугольнике ABC AB = 7, BC = 9, CA = 4. Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 1: 5. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

4.3.10. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM, пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N. Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$ и $\angle MNK + \angle KML = 4\angle LKM$. Найдите длину касательной MN.

4.3.11. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N. Найдите AB, если AC = 8 и MN = 3.

4.3.12. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

4.3.13. (ТР от 20.10.2010 г.) В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 10$, $CA = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 4$.Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

4.3.14. (ТР от 20.10.2010 г.) Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 12$, $CD = 5$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

4.3. 15. В треугольнике ABC AB=10, BC = 5, CA = 6 . Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 1 : 2 . Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF .

4.3.16. (ТР от 09.12.2010) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4.3.17. (ТР от 09.12.2010) Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4.3.18. (ТР от 12.04.2011) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$ $AC = 5$, и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD –точка O, причем $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

4.3.19. (ТВ № 3 2012 г от А.Л.)На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре построена полуокружность ω, которая пересекает прямые AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Найдите радиус полуокружности ω, если известно, что $A_1C = 8$, $B_1C = 7$, а площадь треугольника A_1B_1C равна $14\sqrt{3}$.

4.3.20. (ТВ № 3 2012 г от А. Ларина.) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающийся данной и проходящей через концы основания треугольника.

4.3.21. (ТВ № 8 2012 г от А. Ларина.) Сторона BC прямоугольного треугольника ABC является диаметром окружности. Эта окружность пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите хорду BK, если известно, что площадь треугольника ABC равна 3, а один катет этого треугольника вдвое больше другого.

4.3.22. (ТР № 14 2012 от А.Ларина.) В трапеции ABCD с основаниями 30 и 10 боковые стороны AB и CD равны соответственно 20 и 24. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OBC.

4.3.23. (ТВ№ 17 2012 от А. Ларина.) В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB=8, CB=6. На гипотенузе AC отмечена точка K так, что треугольник ABK – равнобедренный. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK.

4.3.24. (ТВ№18-2012 от А. Л.) В равнобедренный треугольник с основанием 24 и боковой стороной 20 вписана окружность. Найдите длину отрезка, заключенного между двумя сторонами треугольника, параллельного третьей стороне и касающегося окружности.

4.3.25. (ТВ№1-2013 от А.Л.) Дан прямоугольный треугольник ABC, с катетами AB и BC (AB=5, BC=12). Пусть точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямая, проходящая через точку I, параллельна одной из сторон треугольника ABC и пересекает две другие стороны в точках K и P. Найдите длину отрезка KP.

4.3.26. (ТВ№2-2013 от А.Л.) Дан треугольник ABC, где BA = 5, BC = 8. В треугольник вписана окружность, касающееся стороны BC в точке P. Известно, что BP = 3. Найдите площадь треугольника BMP, где M - точка касания окружности со стороной треугольника ABC.

4.3.27. (ТВ№14-2013 от А.Л.) Дан треугольник ABC, в котором $\angle ABC = arccos\frac{1}{2}$. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AC, CB, BA в точках K, T и M соответственно. Прямая AT пересекает окружность в точке L, причем AL=2. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого AT, а другая содержит точку касания окружностью треугольника ABC, если AK=4.

4.3.28. (ТВ№7-2013 от А.Л.) Дан прямоугольный треугольник *MNK* с катетами 5 и 12. Треугольник *KNJ*– равносторонний, причем точка *J* и точка *M* лежат по разные стороны от прямой *NK*. Найдите расстояние от центра вписанной окружности в *MNK* до центра вписанной в K*NJ* окружности.

4.3.29. (ТВ№31-2013, А. Л.) Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника ABC, угол AOC равен 60 градусов. Найдите угол AMC, где M - центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

4.3.30. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника.

4.3.31. Расстояние от точки *M*, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящий через точку *M*.

4.3.32. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно $\frac{7}{24}$.

4.3.33. (ТР от 12.04.2011) Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 29, *AC* = 20, и *BC* = 21. На стороне *BC* взята точка *D*, а на отрезке *AD* –точка *O*, причем *CD* = 7 и *AO* = 3*OD*. Окружность с центром *O* проходит через точку *C*. Найдите расстояние от точки *C* до точки пересечения этой окружности с прямой *AB*.

4.3.34. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.

4.3.35. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AC= 15 и BC = 8. С центром в вершине *B* проведена окружность *S* радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающийся окружности S.

ОКРУЖНОСТЬ

4.3.36. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AC= 5 и BC = 12. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающийся окружности S.

4.3.37. Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54см. Окружность радиуса 6 см, центр которой лежит на катете BC, касается прямых AB и AC. Найти площадь треугольника ABC.

4.3.38. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстоянии 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

4.3.39. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстоянии 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.
Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}$.

4.3.40. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC . Известно, что AB =10. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC .

4.3.41. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC . Известно, что AB =16. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC .

4.3.42. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 15, AC = 9, и BC = 12. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD – точка O, причем CD = 4 и $AO = 3 \cdot OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

4.3.43. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 25, AC = 7, и BC = 24. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD – точка O, причем CD = 8 и $AO=3\cdot OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

4.3.44. В треугольнике ABC AB = 14, BC = 6, CA = 9. Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 1 : 9. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

4.3.45. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A Точка M – середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BM . Найдите угол AC_1B .

4.3.46. Дан треугольник ABC с основанием AB = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и высотой CH = $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Известно, что AH: HB = 2:1. В угол BAC вписана окружность, с центр которой лежит на высоте CH. Найдите радиус окружности.

4.3. 47. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

4.3.48. (ТВ№39-2013, А. Л.) На окружности радиуса 3 с центром в вершине острого угла A прямоугольного треугольника ABC взята точка P. Известно, что AC=3, BC=8, а треугольники APC и APB равновелики. Найдите расстояние от точки P до прямой BC, если известно, что оно больше 2.

4.3.49. В треугольнике ABC AC=12, BC=5, AB=13. Вокруг этого треугольника описана окружность S. Точка D является серединой стороны AC. Построена окружность S_1, касающаяся окружности S и отрезка AC в точке D. Найдите радиус окружности S_1.

4.3.50. (ТВ№21-2013 от А.Л.) На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.

4.3.51. (ТВ 24-2013, АЛ.)Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

4.3.52. (ТВ№29-2013, А. Л.) Окружности радиусов 2 и 1 касаются в точке А. Найдите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке А, а две другие лежат на разных окружностях.

4.4. Окружность и четырехугольник на ГИА

Взаимное расположение окружности и четырехугольника:

- *Трапеция вписана в некую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*
- *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.*
- *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*
- *Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны.*

4.4.1. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

4.4.2. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности. (Демовариант_04)

4.4.3. Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$. (Демовариант_06).

4.4.4. Равнобедренная трапеция описано около окружности радиуса $3\sqrt{5}$. Найдите тангенс угла при большем основании трапеции, если её средняя линия равна 15.

4.4.5. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 3, если тангенс угла при основании трапеции равен $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

4.4.6. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

4.4.7. (2010) Около трапеции *ABCD* описана окружность радиуса 6 с центром на основании *AD*. Найдите площадь трапеции, если основание *BC* равно 4.

4.4.8. (ТР от 08.05.2011 онлайн – турнир ЕГЭ) Окружность диаметром $\sqrt{10}$ проходит через вершины A и B прямоугольника ABCD, а касательная к ней, проведенная из точки C, равна3. Найдите BC, если AB = 1.

4.4.9. Около прямоугольника ABCD описана окружность. На окружности взята точка M, равноудаленная от вершин A и B. Отрезки MC и AB пересекаются в точке E. Найдите площадь четырехугольника AMBC, если ME = 2 см, EC = 16 см.

4.4.10. На основании BC трапеции ABCD взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если AB = 12 и BE : EC = 4 : 5.

4.4.11. В прямоугольную трапецию ABCD вписана окружность, которая касается сторон трапеции в точках K, L, M, N. Найти $\frac{CB}{AD}$, если площадь четырехугольника KLMN относится к площади трапеции как 3 : 10.

4.4.12. Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.

4.4.13. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.
Ответ: 6 или $\frac{8}{3}$.

4.4.14. (ЮФМЛ)Трапеция ABCD описана вокруг окружности и её основания AD и BC касаются окружности в точках M и K соответственно. Доказать, что AM : MD = CK : KB.

4.4.15. (ЮФМЛ)На окружности лежат четыре точки A, B, C, D, в указанном порядке. Точка M середина дуги AB, K – точка пересечения хорд AB и CD, E – точка пересечения хорд AB и MC. Докажите, что около четырёхугольника CDKE можно описать окружность.

4.4.16. (ТВ № 15 2012 от А.Л.) В прямоугольной трапеции с основаниями 18 и 32 тангенс острого угла равен $\frac{12}{7}$. Найдите радиус окружности, касающейся одного из оснований, меньше боковой стороны и диагонали трапеции.

4.4.17. (ТВ№11-2013 от А.Л.) Трапеция ABCD с основаниями AD = 6 и BC = 4 и диагональю BD = 7 вписана в окружность. На окружности взята точка K, отличная от точки D так, что BK=7. Найдите длину отрезка AK.

4.4.18. (ТВ№25-2013, А. Л.) В окружность радиуса $\sqrt{10}$ вписана трапеция с основаниями 2 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

4.4.19. Прямая AE является биссектрисой угла BAD трапеции ABCD. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Хорда MN = 2. Вычислить угол MON , если AB = 4.

4.4.20 .(ЮФМЛ) Биссектрисы двух углов перпендикулярны, а стороны одного из углов пересекают стороны другого угла в четырех различных точках. Доказать, что все эти точки лежат на одной окружности.

4.4.21. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Хорда окружности удалена от центра на расстоянии h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие – на хорде. Чему равна разность длин сторон квадратов?

4.4.22. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соттветственно. Известно, что BC = 1. Найдите EF.

4.4.23. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Около окружности описана трапеция ABCD , боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M – точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S. Найдите радиус окружности.

4.4.24. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Площадь ромба ABCD равна 18. В треугольник ABD вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая, параллельная диагонали AC и отсекающая от ромба треугольник площади 1. Найдите синус угла BAC.

4.4.25. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецова, 20 вар., 2013)
В трапеции основания AD и BC равны соответственно 36 и 12, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точка A и B и касающейся прямой CD, если AB = 10.

4.4.26. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецова, 20 вар., 2013)
В трапеции основания AD и BC равны соответственно 7 и 124, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точка A и B и касающейся прямой CD, если AB = 8.

4.5. Окружность и четырехугольник на ЕГЭ

Взаимное расположение окружности и четырехугольника:

- *Трапеция вписана в некую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*
- *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.*
- *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*
- *Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны.*

4.5.1. (2010) Трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана в окружность с центром *O*. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

4.5.2. Дана трапеция *ABCD*, основания которой BC = 44, AD = 100, AB = CD = 35. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

4.5.3 Дан параллелограмм ABCD, AB = 3, BC = 7, ∠A = 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

4.5.4. C4. (ТВ№30-2013, А. Л.) Длины соседних сторон вписанного в окружность четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найти радиус окружности.

4.5.5. (2010 г)Дан параллелограмм ABCD, AB = 3, BC = 5, ∠A = 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

4.5.6.С4. .(ТВ № 16 2012 от А.Л.) В параллелограмме острый угол равен 60°, периметр равен 30, а площадь равна $28\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

4.5.7. С4.(ТВ№8-2013 от А.Л. Четырехугольник KLMN вписан в окружность, его диагонали KM и LN пересекаются в точке F, причем KL=8, MN=4, периметр треугольника MNF равен 9, площадь треугольника KLF равна $3\sqrt{15}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KNF.

4.5.8. C_4. .(ТВ№9-2013 от А.Л.) В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма ABCD.

4.5.9. С4. (ТВ№25-2013, А. Л.) Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания этой трапеции.

ОТВЕТЫ

I. Планиметрические задачи на ЕГЭ

ЧАСТЬ В

1. 24. **2.** 128. **3.** 24. **6.** 5. **8.** 64. **10.** 80. **11.** 5. **12.** 14. **13.** 3. **14.** 3. **15.** 36. **16.** 3. **17.** 6. **18.** 54. **19.** 21. **20.**10. **21.** 24. **22.** 270. **23.** 32. **24.** 12. **27.** 1. **29.** 10. **34.** 24. **37.** 9. **38.** 12. **39.** 64. **40.** 8.

II. Тематический сборник

1.1. Треугольник

1.1.1. 30° или 150°. **1.1.2.** 16. **1.1.3.** 24. **1.1.4.** 8. **1.1.5**. 48. **1.1.6.** 2. **1.1.7.** 20.

1.1.8. $\angle A = 180° - \arccos\dfrac{3\sqrt{6}}{8} - \arccos\dfrac{7}{8}$, $\angle B = \arccos\dfrac{7}{8}$, $\angle C = \arccos\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

1.1.9. 8 или 18. **1.1.10.** $\frac{125}{12}$ *или* $\frac{250}{7}$. **1.1.11**. 2,4; 21,6. **1.1.12**. AB : BC = 1 : 2. **1.1.13.** 4,8; $\frac{240}{49}$.

1.1.14. $\frac{25}{6}$; $\frac{150}{11}$. **1.1.15**. $\frac{150}{11}$; $\frac{25}{6}$.

1.2.Медианы треугольника

1.2.1. $\sqrt{11}$. **1.2.2.** 14. **1.2.3.** 3. **1.2.4.** 21. **1.2.5.** 30°или 150°. **1.2.6.** 0,1. **1.2.7.** $3\sqrt{2}$. **1.2.8.** $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$; $\dfrac{16}{3}$.

1.2.9. 20. **1.2.10.** 80 или 16.

1.3. Биссектрисы треугольника

1.3.1. 270. **1.3.2.** 32. **1.3.3.** 4, 5. **1.3.4.** $\sqrt{5{,}8}$ **1.3.5**. $\dfrac{Sb(3a+b)}{2(a+b)\cdot(2a+b)}$ **1.3.6.** $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ **1.3.7**. 44. **1.3.8**. $25\sqrt{3}$.

1.3.9. $\dfrac{2}{3}$. **1.3.10**. 36°, 36°, 108° или 60°, 60°, 60° . **1.3.11.** 150 или 30.

1.4. Высоты треугольника

1.4.1. 60°; 120°. **1.4.2**. 45° или 135°. **1.4.3**. 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30° или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°. **1.4.4**. $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$ или $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$. **1.4.5**. $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ **1.4.6**. $\dfrac{2}{3}$ **1.4.7**. 4,5.

1.4.8. 16. **1.4.9**. 45° или 135°. **1.410**. 60^0 или 120^0. **1.4.11**. 5 и $\sqrt{41}$; 5 и $\sqrt{137}$.

2.1. Параллелограмм

2.1.1. 60. **2.1.2**. 91. **2.1.3**. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha}}{ctg\alpha}$. **2.1.4**. $\dfrac{(a-b)^2}{2}\cdot\sin\alpha$ **2.1.5**. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$; $\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$.

2.1.6. $19\dfrac{1}{3}$; $6\dfrac{4}{11}$. **2.1.7**. 72. **2.1.8**. $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$. **2.1.9**. $\dfrac{192}{17}$; $\dfrac{1728}{25}$. **2.1.10**. $\sqrt{35}$.

2.1.11. $\frac{\sqrt{39}}{3}$ или $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

2.2. Ромб. Прямоугольник. Квадрат.

2.2.1.10. **2.2.2.** 24. **2.2.3.** 1 или 3**.** **2.2.4.** 10; 2. **2.2.5.** $\frac{12}{5}$. **2.2.6**. 1. **2.2.7.** 3 $\sqrt{10}$.

2.2.8. 16 или 48. **2.2.9.** 12 или 20. **2.2.10.** 18; $\frac{2}{3}$. **2.2.11.**1; 2; $\sqrt{7}$. **2.2.12.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2.2.13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **2.2.14.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2.3. Трапеция, четырехугольник

2.3.1 5**.** **2. 3.2**.64. **2.3.3**.5. **2.3.4**. 36. **2.3.5.** 72. **2.3.6**. 54. **2.3.7**. 4. **2.3.8**. 9. **2.3.9**. 12.
2.3.10. 62. **2.3.11**.8. **2.3.12**. 144; 48; 16. **2.3.13.** 36 или 8. **2.3.14**. 28 или 2 $\sqrt{181}$

2.3.15. $\frac{Sa^2}{(a-c)(a+b-c)}$. **2.3.16**. m·l. **2.3.17**. $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$.

2.3.18. $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$. **2.3.19**. 5. **2.3.20**. 24. **2.3.21.** $\angle C = \angle D = 110°$, $\angle A = 50°$, $\angle B = 90$. **2.3.22**.15. **2.3.23**. 3. **2.3.24**. $\frac{3}{4}$ **2.3.25**. 12 или 12$\sqrt{3}$. **2.3.26**. 3 или 4.

2.3.27. 28 или 2 $\sqrt{181}$. **2.3.28**. 40° или 80° **2.3.29**. 900 или 780. **2.3.30**.22,5 или 2,4.
2.3.31. 36 или 8 $\sqrt{19}$. **2.3.32**. 22,5; 14,4. **2.3.33**. 28; 2 $\sqrt{181}$. **2.3.34**.12$\sqrt{3}$. **2.3.35**. 36; 8$\sqrt{19}$.
2.3.36. 144; 48; 16. **2.3.37**. 40°, 80°. **2.3.38**. 40; 20. **2.3.39**. 80°; 40°. **2.3.40**. 6.
2.3.41. 2 и 22. **2.3.42**. 7 и 23.

3.1. Отношение отрезков и площадей в треугольнике

3.1.1. 1. **3.1.2**. $\frac{2}{3}$. **3.1.3.** 5 : 4. **3.1.4**. $\frac{1}{7}S$ **3.1.5**. $\frac{5}{4}$S. **3.1.6**. 3 : 2. **3.1.7**. 5 : 19. **3.1.8**. 11.
3.1.9. 16 : 5. **3.1.10**. 8 : 7. **3.1.11.** 3 : 5**.** **3.1.12.** 12 или 20. **3.1.13**. 8; 72. **3.1.14**. 72; 8.
3.1.15. 5,5.

4.1. Окружность.

4.1.1. $\frac{b-a}{2}$ или $\frac{b+a}{2}$. **4.1.2.** 45° или 135°. **4.1.3**. 9; 39 **4.1.4**. 2 $\sqrt{2}$; 6 $\sqrt{2}$. **4.1.5.** 1; 6.

4.1.6. 2; 15. **4.1.7**. $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$; $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. **4.1.8**. $a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}$; $a\cdot\sqrt{1-\frac{r}{R}}$.

4.1.9. 3 + 2$\sqrt{3}$; - 9 + 2 $\sqrt{21}$. **4.1.10**. 21 или 9. **4.1.11.** $\frac{2a}{1+\sqrt{3}}$ и $\frac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; $\frac{2a}{1-\sqrt{3}}$ и $\frac{a\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$.

4. 1. 12. 2 - $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2 + $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **4.1.13**. $\frac{a}{b}=\frac{7-2\sqrt{6}}{6}$; $\frac{a}{b}=\frac{7+2\sqrt{6}}{6}$. **4.1.14**. 1; 7.

4.1.15.1,44; 36. **4.1.16**. $\sqrt{2}$; 5$\sqrt{2}$. **4.1.17**. 30; 2$\sqrt{70}$. **4.1.18**. 16. **4.1.19**. 2 ; 5. **4.1.20** . $\frac{8}{9}$ или $\frac{32}{9}$.
4.1.21. 1; 16. **4.1.22**. 12; 4. **4.1.23**. $\frac{225}{64}$ или $\frac{25}{4}$ или $\frac{225}{4}$. **4.1.24**. 4 $\sqrt{6}$. **4.1.25**. $\frac{R(1-sin\alpha)}{1+sin\alpha}$; $\frac{R(1+sin\alpha)}{1-sin\alpha}$ **4.1.26**. 28$\sqrt{5}$. **4.1.27**. $\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2\cdot x}{2y}$; $\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2\cdot y}{2x}$. **4.1.28**. $\frac{9}{20}$ *или* $\frac{9}{10}$
4.1.29. $\sqrt{53}$; $\sqrt{13}$. **4.1.30.** 3; 27. **4.1.31**. 4,8 или $\frac{24\sqrt{7}}{11}$ или $\frac{16\sqrt{57}}{11}$. **4.1.32**. 7; $\frac{7}{4}$. **4.1.33**. 32; 38.
4.1.34. 5,5; 3,5 .**4.1.35**. 10; 38. **4.1.36**. : $\frac{15\sqrt{3}}{4}$; $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **4.1.37**. 4$\sqrt{2}$; 4$\sqrt{14}$.

ОТВЕТЫ

4.2. Окружность и треугольник на ОГЭ

4.2.1.24. **4.2.2**. $\frac{5}{4}$ **4.2.3**. 3,75. **4.2.4**. $\frac{5\sqrt{13}}{6}$. **4.2.5**. $a\sqrt{3}$. **4.2.6**. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **4.2.7**. 3; 6. **4.2.8**.6
4.2.9. 4. **4.2.10**. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3}{4}$. **4.2.12**. $\frac{3\sqrt{55}}{4}$ **4.2.13**. 4,5. **4.2.14**. 13. **4.2.15**. $\frac{40}{3}$ **4.2.16**. 2. **4.2.17**. $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.
4.2.18. 62°. **4.2.19**. 5. **4.2.20**. 5. **4.2.21**.13. **4.2.22**.1. **4.2.23**. 3. **4.2.24**. 3 : 1. **4.2.25**. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
4.2.26. $2\sqrt{3}$. **4.2.27**. 7. **4.2.28**. 2. **4.2.29**.2.

4.3. Окружность и треугольник на ЕГЭ

4.3.1. $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$. **4.3.2**. 105°; 165°. **4.3.3**. $\frac{17}{2}$; $\frac{41}{2}$. **4.3.4**. 90° + α, если α < 45° или 90° - α, если α > 45° **4.3.5**. $4\sqrt{3}$ или 12. **4.3.6**. $8\sqrt{3}$; 24 **4.3.7**. 40°; 80°; 60° или 60°; 20°; 100°.
4.3.8. 35° или 55°. **4.3.9**. 4,5 или 6 **4.3.10**. $\frac{\sqrt{2}}{sin15^\circ}=2(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{\sqrt{2}}{sin105^\circ}=2(\sqrt{3}-1)$.
4.3.11. 4; 12. **4.3.12**. 6,4; 8. **4.3.13**. 6; 8. **4.3.14** 9; 4. **4.3.15**. : $\frac{9}{2}$; $\frac{17}{6}$. **4. 3.16**. $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$. **4.3.17**. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$. **4.3.18**. 6,5 и $\frac{60}{13}$. **4.3.19**. $\sqrt{57}$; 13. **4.3.20**. 4,1; 8,5. **4.3.21**. $\frac{4\sqrt{15}}{5}$; $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **4.3.22**. 6,25; 18,75 **4.3.23**. $\frac{25}{6}$; $\frac{4\sqrt{10}}{3}$. **4.3.24**. 6; 7,5. **4.3.25**. $\frac{221}{30}$; $\frac{25}{6}$; $\frac{36}{5}$. **4.3.26**. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; $\frac{75\sqrt{3}}{28}$. **4.327**. $12\sqrt{3}$ или $4\sqrt{3}\cdot\frac{5+2\sqrt{13}}{3}$. **4.3.28**. : $\frac{\sqrt{273+78\sqrt{3}}}{3}$; $\frac{\sqrt{57+30\sqrt{3}}}{3}$; $2\sqrt{8+2\sqrt{3}}$. **4.3.29**. 105°; 165°. **4.3.30**. 18 или $21\frac{1}{3}$. **4.3.31**. $4+\sqrt{6}$; $4-\sqrt{6}$. **4.3.32**. 8 или 12,25. **4.3.33**. 14,5 и $\frac{420}{29}$.
4.3.34. 25; 32. **4.3.35**. : $\frac{51}{8}$ или $\frac{85}{8}$. **4.3.36**. $\frac{52}{9}$ или $\frac{260}{9}$. **4.3.37**. S = 121,5 или S = 97, 2.
4.3.38. $54\pm12\sqrt{13}$. **4.3.39**. $216\pm12\sqrt{265}$ **4.3.40**. $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ **4.3.41**. $\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
4.3.42. 7,5 или 7,2. **4.3.43**. 12,5 или 6,72. **4.3.44**. 4,9 или 5,5. **4.3.45**. $90^0+\alpha$; α.
4.3.46. $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)}{6}$ или $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{11}-3)}{2}$ **4.3.47**. 3; 6. **4.3.48**. 3 и $\frac{24}{5}$ **4.3.49.** 2 или 4,5.
4.3.50. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$. **4.3.51**. $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$; 40, 40, 48 **4.3.52**. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; $\frac{\sqrt{21}}{7}$; 2.

4.4. Окружность и четырехугольник на ОГЭ

4.4.1. 80. **4.4.2**. 3. **4.4.3**. 12. **4.4.4**. 1. **4.4.5**. 8. **4.4.6**. 9; 39. **4.4.7**. $32\sqrt{2}$. **4.4.8**. $\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$ или $\frac{3\sqrt{5}+3}{2}$. **4.4.9**.97,2. **4.4.10**. 18. **4.4.11**. $\frac{1}{3}$. **4.4.12**. 3 или $\frac{4}{3}$. **4.4.13**. 6 или $\frac{8}{3}$. **4.4.16**. 6; 8.
4.4.17. 4. **4.4.18**. $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$; $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$. **4.4.19**. 120°. **4.4.21**. $\frac{8}{5}$h. **4.4.22**. 1. **4.4.23**. $\sqrt{5}$. **4.4.24**. $\frac{1}{3}$.
4.4.25. 10. **4.4.26**. 12.

4.5. Окружность и четырехугольник на ЕГЭ

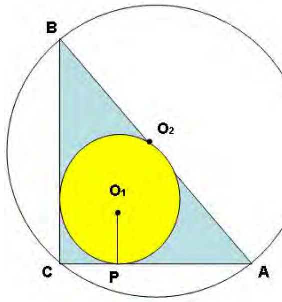
4.5.1. 1; 9. **4.5.2**. 5; 30. **4.5.3**. $\frac{35\sqrt{3}}{6}$; $8\sqrt{3}$. **4.5.4**. $\frac{\sqrt{21}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **4.5.5**. $\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.
4.5.6. : $\frac{28\sqrt{3}}{15+\sqrt{57}}$; $\sqrt{3}$. **4.5.7**. $\frac{8\sqrt{15}}{15}$; $\frac{4\sqrt{15}}{5}$. **4.5.8**. $\frac{1728}{25}$; $\frac{192}{17}$. **4.5.9**. 42 и 14; 24 и 32

РЕШЕНИЯ

I. Решение заданий части В

1. *Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2м и 5м.*

Решение:



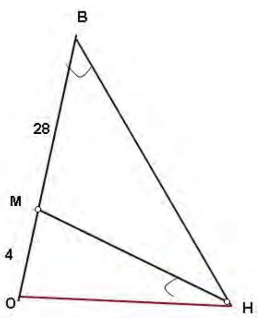
$S = 0,5\,a \cdot b$; $c = 10$, $CP = PO_1 = 2$.
Пусть $CA = 2 + x$, $CB = y + 2$, тогда
$AB = x + y = 10$. $(2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 100$.
$4 + 4x + x^2 + 4 + 4y + y^2 = 100$;
$x^2 + y^2 = 52$; $100 - 20x + x^2 + x^2 = 52$;
$2x^2 - 20x + 48 = 0$; $x^2 - 10x + 24 = 0$;
$x_1 = 6$; $x_2 = 4$, тогда $y = 6$ или $y = 4$.
$AC = a = 8$, $CB = b = 6$,
$S = 0,5\,a \cdot b = 0,5 \cdot 8 \cdot 6 = 24$

Ответ: 24 (Демовариант_02).

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) Центр описанной окр. – середина гипотенузы;
2) радиус вписанной окружности;
3) Свойства касательных;
4) теорема Пифагора;
5) площадь треугольника;

2. *В треугольнике OBH точка M делит сторону OB на отрезки $OM = 4$ и $MB = 28$, $\angle OHM = \angle OBH$. Найдите площадь треугольника OHM, если $\angle O = 45^\circ$.*

Решение:

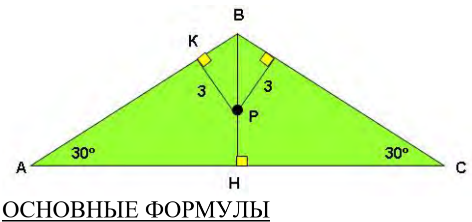


$\triangle OMH \sim \triangle OHB$ по углам:
$\angle OHM = \angle OBH$, $\angle O$ – общий $\Rightarrow$
$OM : OH = OH : OB \Rightarrow OH^2 = OM \cdot OB$,
$OH = \sqrt{4 \cdot 32} = 8 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$
$S_\Delta = 0,5 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,5\sqrt{2} =$
$= 16$

Ответ: 16.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия;
2) решение пропорций;
3) формулы площадей треугольника;
4) значение тригонометрических функций некоторых углов.

3. *Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.*



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство отрезков равноудаленных от сторон угла; 2)свойство равнобедренного треугольника; 3) углы прямоугольного треугольника и их соотношения; 4) Свойство катета, лежащего против угла в 30 °;
5)Теорема Пифагора;

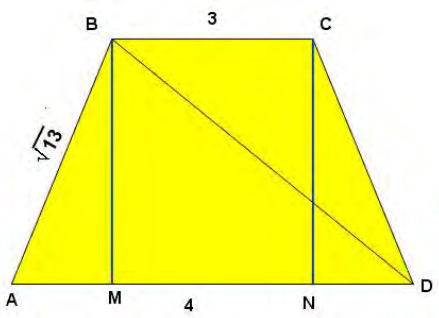
Решение:
ОК и РВ – перпендикуляры, следовательно, ВР – биссектриса, медиана и высота равнобедренного Δ АВС. $\angle ABH = 60^\circ$, а $\angle BPK = 30^\circ$, тогда $BP = 2\sqrt{3}$, а $BH = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB = 8\sqrt{3} \Rightarrow$

$$AH = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{4\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3}} = 12$$

Тогда АВ = 24
Ответ: 24.

6. *Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.*

Решение:



MN = 3. тогда AM = 0,5. Из △ ABM:

$$MB = \sqrt{\sqrt{13}^2 - 0,5^2} = \sqrt{13 - 0,25} = \sqrt{12,75}$$

MD = 3, 5 тогда

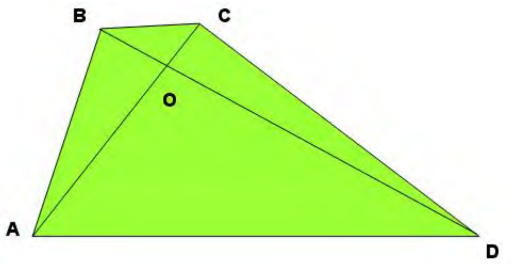
$$BD = \sqrt{12,75 + 3,5^2} = \sqrt{12,75 + 12,25} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1)свойства равнобедренной трапеции; 2) теорема Пифагора;

8. *В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = 3OC$. Площадь треугольника AOD равна 36. Найдите площадь трапеции.*



Решение:

$S_{тр}$ = 0,5 (AD + BC) h.

△AOD ~ △BC, k = 3, ⇒ $S_{AOD} : S_{OBC} = 9$,

S_{OBC} = 36: 9 = 4.

$S_{OBC} = 0,5 \cdot OC \cdot h_1$; $S_{OBA} = 0,5 \cdot OA \cdot h_1$;

$S_{OBA} = 3 \cdot S_{OBC} = 3 \cdot 4 = 12$.

$S_{OCD} = S_{OBA} = 12$.

$S_{тр} = S_{AOD} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OBA} = 36 + 12 + 12 + 4 = 64$.

Ответ: 64.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

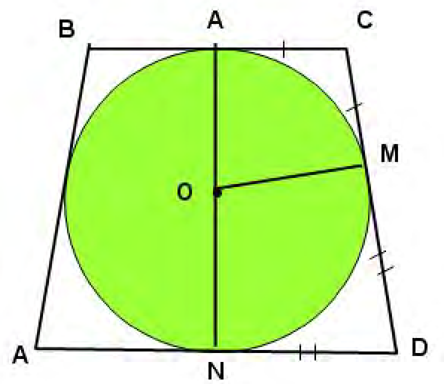
1)Подобные треугольники: свойства и признаки;

2) Отношение площадей подобных треугольников.

(другой способ решения см № 5)

10. *Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.*

Решение:



AB = CD = 10, DM = ND, MC = CA ⇒

⇒ ND + CA = 10. h = OA + ON = 4 + 4 = 8

$S_{тр}$ = 0,5 (AD + BC) h = 10 · 8 = 80

Ответ: 80.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Свойство описанной трапеции;

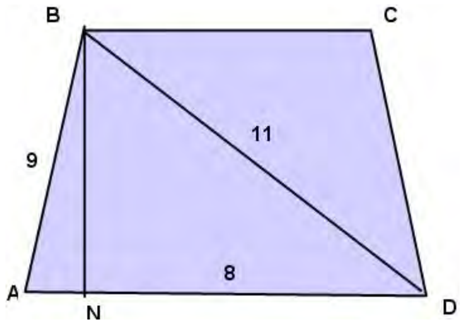
2) Свойства равнобедренной трапеции;

3) Свойства касательных.

11. *Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. Найдите меньшее основание трапеции.*

Решение:

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ В



$$S_{ABD} = \sqrt{14\cdot5\cdot3\cdot6} = \sqrt{9\cdot4\cdot5\cdot7} = 6\sqrt{35}$$

$S_{ABD} = 4 \cdot BN = 6\sqrt{35} \Rightarrow BN = 1{,}5\sqrt{35}$;

$AN = \sqrt{81-(1{,}5\sqrt{35})^2} = 1{,}5$; $BC = 8 - 1{,}5\cdot 2 = 5.$

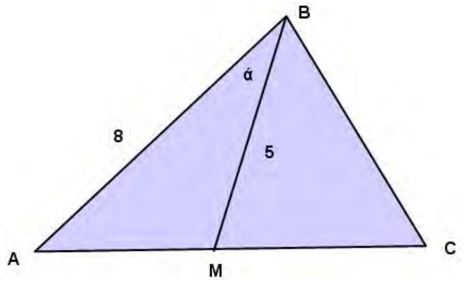
Ответ: 5

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) Свойства равнобедренной трапеции;
2) Формула Герона;

12. *Площадь треугольника ABC равна* $20\sqrt{3}$. *Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5.*

Решение:



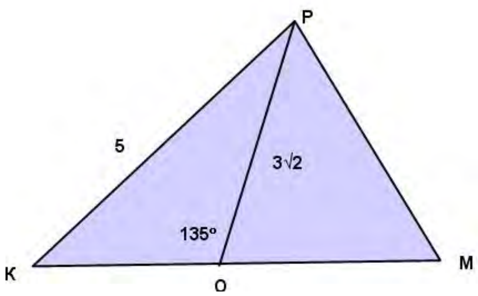
Так как BM – медиана, то $S_{ABM} = S_{BMC} = 10\sqrt{3} =$
$= 0{,}5\ AB \cdot BM \cdot \sin\alpha.$
$\sin\alpha = 10\sqrt{3} : (0{,}5 \cdot 8 \cdot 5) = \sqrt{3} : 2 \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow AM = \sqrt{64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7.$
$AC = 2 \cdot AM = 14.$

Ответ: 14.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 3) значения тригонометрических функций некоторых углов.

13. *Найти площадь треугольника KMP, если сторона KP равна 5, медиана PO равна* $3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135°$.



Решение:

По теореме косинусов найдем KO:
$PK^2 = KO^2 + OP^2 - 2 \cdot KO \cdot OP \cdot \cos 135°.$
$25 = KO^2 + 18 + 6, \Rightarrow KO^2 = 1, KO = 1.$
$S_{KPO} = S_{POM} = = 0{,}5\ KO \cdot OP \cdot \sin 135° =$
$= 0{,}5\cdot1\cdot3\sqrt{2}\cdot0{,}5\sqrt{2} = 0{,}5\cdot3 \Rightarrow S_{KPM} = 2\cdot S_{KOP} = = 2\cdot0{,}5\cdot3$
$= 3.$

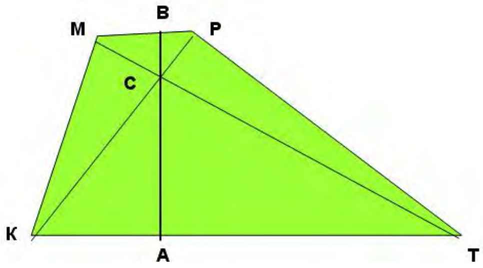
Ответ: 3.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 3) значения тригонометрических функций некоторых углов. 4) свойства медианы равнобедренного треугольника.

15. *В трапеции KMPT с основаниями MP и KT диагонали пересекаются в точке C. Площадь треугольника MCP равна 4, KT = 2 MP. Найти площадь трапеции.*

Решение:



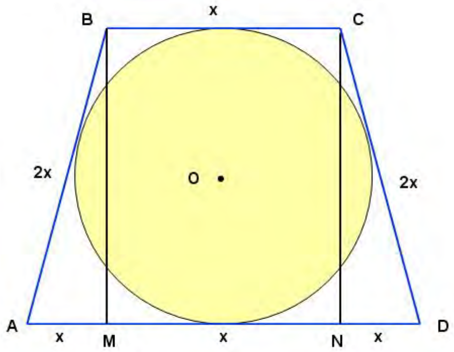
$\triangle$ KCT $\sim \triangle$ MCP по двум углам $\Rightarrow$
KT : MP = AC : CB = 2. $S_{MCP} = 0,5 \cdot MP \cdot CB = 4 \Rightarrow CB = 8 : MP$.
AC = 2 CB = 16 : MP.
$S_{трап} = 0,5\ (KT + MP) \cdot AB = 0,5 \cdot 3\ MP \cdot 3CB = 0,5 \cdot 9\ MP \cdot 8 : MP = 36$

Ответ: 36.

<u>ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ</u>
1) признаки подобия; 2) решение пропорций;
3) формулы площадей треугольника, трапеции;
4) значение тригонометрических функций некоторых углов.

16. *В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна* $24\sqrt{3}$*, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.*
Ответ: 3 (Демовариант_04)

<u>Решение:</u>



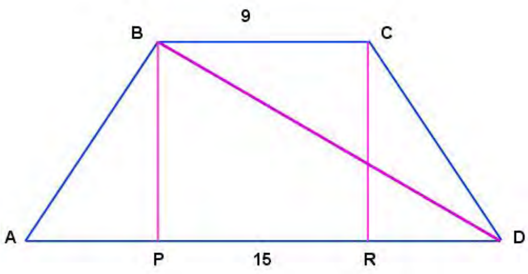
Так как трапеция равнобедренная и описанная, то BC + AD = AB + CD. $\angle BAM = 60° \Rightarrow$
$\angle ABM = 30°$, тогда, если AM = x, то AB = 2x $\Rightarrow$
CD = 2x $\Rightarrow$ BC + AD = 2x + 2x = 4x, тогда
$S_{тр} = 0,5\ (BC + AD) \cdot BM = 0,5 \cdot 4x \cdot BM$;
Из Δ ABM найдем BM: $BM = 2x \cdot \sin 60° = x\sqrt{3}$
$S\ тр = 2x \cdot BM = 2x^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \Rightarrow$
$BM = x\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow r = 3$.

Ответ: 3.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство описанного четырехугольника; 2) формулы площади трапеции; 3) свойства равнобедренной трапеции; 4) свойство катета, лежащего против угла 30 °; 5) соотношения между углами и сторонами прямоугольного треугольника.

17. *В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найти площадь трапеции.*

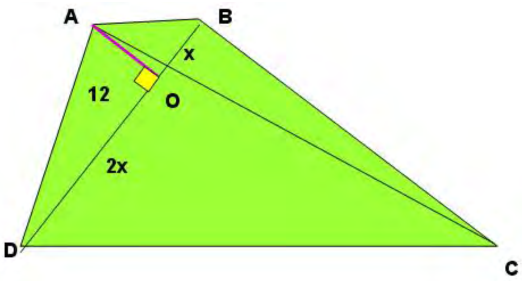
<u>Решение:</u>



Так как трапеция равнобедренная, то PR = CD = 9 $\Rightarrow$ AP = (15 – 9) : 2 = 3
$\triangle$ABP $\sim \triangle$ ABD по углам:
$\angle APB = \angle ABD$ - прямые, $\angle A$ – общий $\Rightarrow$
AB : AD = AP : AB $\Rightarrow AB^2 = AD \cdot AP$,
$\Rightarrow AB^2 = 15 \cdot 3 = 45 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$;
$\Rightarrow BP = \sqrt{45 - 9} = \sqrt{36} = 6$
$S_{тр} = 0,5 \cdot (15 + 9) \cdot 6 = 24 \cdot 3 = 72$
Ответ: 72

<u>ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ</u>
1) признаки подобия; 2) решение пропорций;
3) теорема Пифагора; 4) площадь трапеции

18. Диагонали трапеции ABCD (AB || CD) пересекаются в точке О. Площадь треугольника ADO равна 12, DO = 2 BO. Найти площадь трапеции.



Решение:

$S_{AOD} = 0{,}5 \cdot 2x \cdot AO = 12$;

$S_{AOB} = 0{,}5 \cdot x \cdot AO = 12 : 2 = 6$

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$, по углам, $k = 2$:

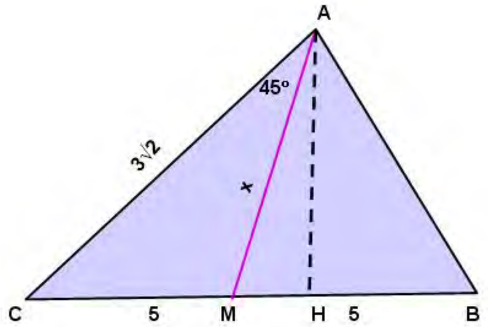
$\Rightarrow S_{DOC} : S_{AOB} = k^2 = 4 \Rightarrow S_{DOC} = 6 \cdot 4 = 24$;

$S_{BOC} = S_{AOD} = 12 \Rightarrow S_{тр.} = S_{AOD} + S_{AOB} + S_{DOC} + S_{BOC} =$
$12 + 12 + 6 + 24 = 54$

Ответ:54.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия;
2свойства площадей подобных треугольников;

19. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.
Ответ: 21. (Демовариант_05)



Решение:

По теореме косинусов

$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cdot \cos 45° =$

$= 18 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}5 = 25$,

$x^2 - 6x - 7 = 0$, $x_1 = -1$; $x_2 = 7 \Rightarrow AM = 7$.

$S_{ACM} = 0{,}5 \cdot AC \cdot AM \cdot \sin 45° = 0{,}5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 0{,}5 \cdot 21$;

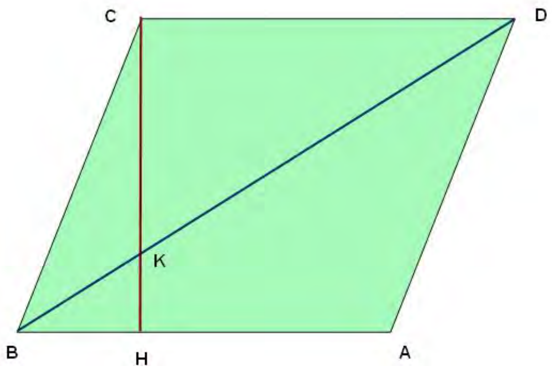
$S_{ACM} = S_{ABM} = 0{,}5 \cdot 21 \Rightarrow$

$S_{ABC} = 2 \cdot S_{ACM} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 21 = 21$

Ответ: 21.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 4) значение тригонометрических функций некоторых углов.

20. Дан ромб ABCD с острым углом В. Площадь ромба равна 320, а синус угла В равен 0,8. Высота СН пересекает диагональ BD в точке К. найдите длину отрезка СК.



Решение:

1. $S_{ром.} = BC^2 \cdot \sin B = 320$; $BC^2 = 320 : \sin B = = 320 : 0{,}8 = 400 \Rightarrow BC = 20$.

2. $S_{ром} = AB \cdot CH = 320 \Rightarrow CH = 320 : AB =$
$= 320 : 20 = 16$.

3. Из Δ BCH $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$

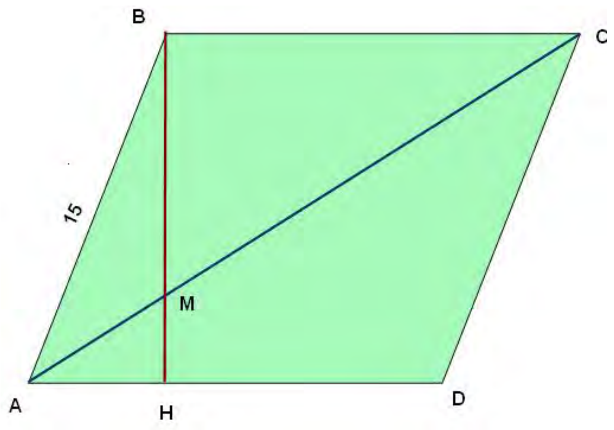
4. Диагональ BD – биссектриса угла В $\Rightarrow$
СК : ВС = (16 – СК) : ВН;
СК : 20 = (16 – СК) : 12; 12 СК = 320 – 20 СК;
СК = 10.

Ответ: 10.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) площадь ромба; 2) свойства биссектрисы;
3) свойства ромба; 4) теорема Пифагора.

21. В ромбе ABCD из вершины тупого угла В проведена высота ВН к стороне AD. Она пересекает диагональ АС в точке М. Сторона ромба равна 15, а его площадь равна 135. Найдите площадь треугольника АМН.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ В



Решение:

1. $S_{ром} = AB \cdot BH = 135 \Rightarrow BH = 135 : AB = 135 : 15 = 9.$
2. Из Δ BAH

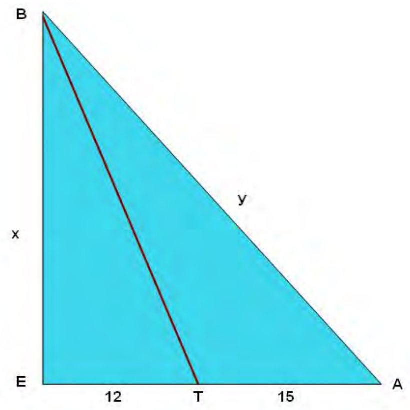
$$AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

3. Диагональ AC – биссектриса угла A $\Rightarrow$
MH : AH = (9 – HM) : BA;
MH : 12 = (9 – HM) : 15;
15 MH = 108 – 12 MH; 27 MH = 108,
MH = 4
4. $S_{AMH.} = 0{,}5 \cdot AH \cdot HM = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 4 = 24.$

Ответ: 24

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) площадь ромба; 2) свойства биссектрисы; 3) свойства ромба; 4) теорема Пифагора. 5) площадь прямоугольного треугольника.

22. В прямоугольном треугольнике ABE с прямым углом E проведена биссектриса BT, причем AT = 15, TE = 12. Найдите площадь треугольника ABT.



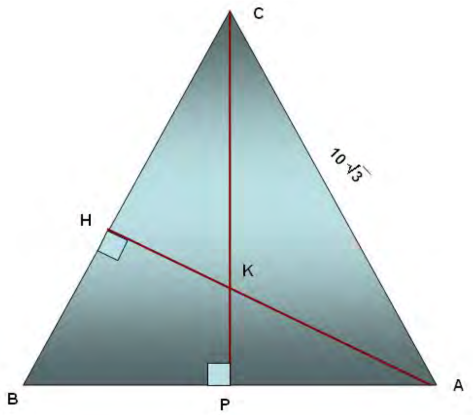
Решение:

1. По свойству биссектрисы ET : BE = AT : AB,
$12 : x = 15 : y \Rightarrow x = 0{,}8\ y$
2. Из Δ BAE имеем $x^2 + 27^2 = y^2$ или
$0,64y^2 + 27^2 = y^2$, $0,6^2\ y^2 = 27^2$ или $0,6\ y = 27$,
$y = 45$, а $x = 0{,}8 \cdot 45 = 36$.
3. $S_{ATB.} = 0{,}5 \cdot AT \cdot BE = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 36 = 270$

Ответ: 270

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) свойства биссектрисы; 2) теорема Пифагора. 3) площадь треугольника.

23. **П**лощадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь CKH.



Решение:

1. Так как треугольник равнобедренный, то CA = BC $\Rightarrow$
$S_{ACB.} = 0{,}5 \cdot AC \cdot AH = 90 \Rightarrow$
$AH = 90 : 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
2. По теореме Пифагора найдем CH из ΔCAH:

$$CH = \sqrt{CA^2 - AH^2} = \sqrt{300 - 108} = 8\sqrt{3}$$

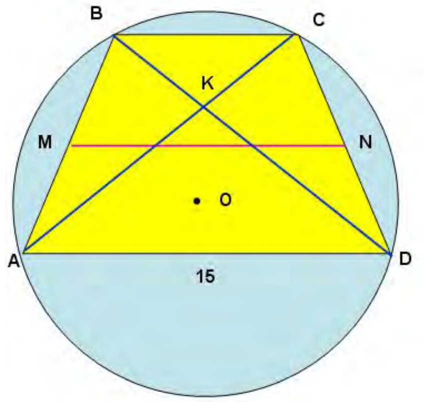
3. По свойству биссектрисы KH : CH = AK : AC,
$KH : 8\sqrt{3} = (6\sqrt{3} - KH) : 10\sqrt{3}$
$10\sqrt{3} \cdot KH = 8\sqrt{3} \cdot (6\sqrt{3} - KH) \Rightarrow KH = 8\sqrt{3} : 3$
4. $S_{CKH.} = 0{,}5 \cdot CH \cdot KH = (0{,}5 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}) : 3 = 32$

Ответ: 32.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) свойства биссектрисы; 2) теорема Пифагора. 3) площадь прямоугольного треугольника; 4) свойства равнобедренного треугольника.

24. Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

Ответ: 12 (Демовариант_06).



Решение

1. Средняя линия MN = 0,5·(AD + BC)
2. По теореме синусов BK : sin ∠BAK = AK : sin ∠ABK,

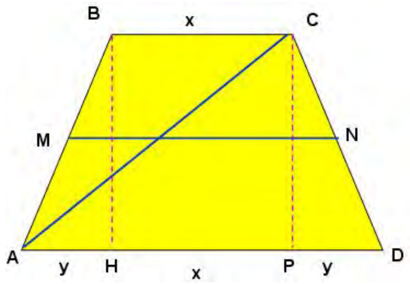
BK : $\frac{1}{3}$ = AK : $\frac{5}{9}$, BK = 0,6 AK.

3. △ AKD ~ △ BKC ⇒ BC : AD = BK : AK = 0,6 ⇒ BC = 9.
4. Средняя линия MN = 0,5·(AD + BC) = 0,5 (15 + 9) = 12.

Ответ: 12.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства вписанной трапеции; 2) свойства равнобедренной трапеции; 3) признаки подобия; 4) средняя линия трапеции.

25. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её средняя линия равна 4, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$.



Решение:

1. Так как трапеция равнобедренная, то BC = HP = x.
AH = PD = y, тогда 2x + 2y = 2 MN ⇒ x + y = 4, то есть AP = 4.
2. cos ∠CAD = AP : AC = $\frac{2}{\sqrt{5}}$. AC = 2 $\sqrt{5}$.

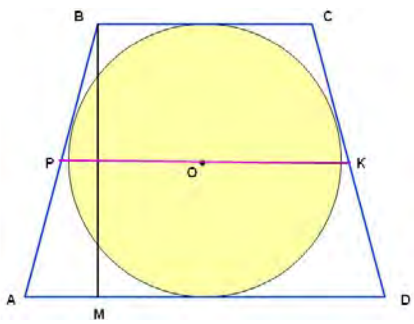
По теореме Пифагора найдем CP: $CP = \sqrt{20-16} = 2$.

3. $S_{тр.}$ = 0,5· MN · CP = 0,5· 4 · 2 = 4 .

Ответ: 4.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1)свойства равнобедренной трапеции;
2) соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника;
3) площадь трапеции.

27. Равнобедренная трапеция описано около окружности радиуса 3 $\sqrt{5}$. Найдите тангенс угла при большем основании трапеции, если её средняя линия равна 15.



Решение:

1) По свойству описанного четырехугольника

2 · AB = AD + BC, или AB = 15. BM = 2 · r = 6 $\sqrt{5}$

2) По теореме Пифагора

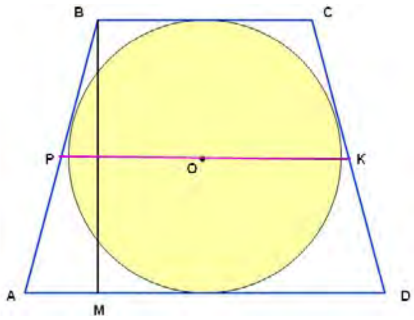
$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{225-45} = 6\sqrt{5}$

3) tg A = MB : AM = 6 $\sqrt{5}$: 6 $\sqrt{5}$ = 1

Ответ: 1.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство описанного четырехугольника; 2) соотношения между сторонами прямоугольного треугольника; 3) свойство равнобедренной трапеции.

28. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 3, если тангенс угла при основании трапеции равен $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.



Решение:

1) По свойству описанного четырехугольника

$2 \cdot AB = AD + BC$, или $AB = PK$. $BM = 2 \cdot r = 6$

2) $\operatorname{tg} A = MB : AM = 6 : AM = \dfrac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow AM = 2\sqrt{7}$

3) По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{28 + 36} = 8 \Rightarrow$ $PK = 8$

Ответ: 8.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) свойство описанного четырехугольника; 2) соотношения между сторонами прямоугольного треугольника; 3) свойство равнобедренной трапеции.

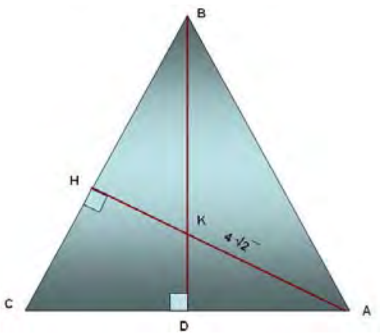
29. (ДВ) Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Ответ: 10

Примечание: СМ. Задача № 20.

.

30. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 20. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BD и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника BKH, если $AH = 4\sqrt{2}$.



Решение:

1) $S_{ABC} = 0{,}5 \cdot AH \cdot CB = 20 \Rightarrow CB = 20 : (0{,}5 \cdot AH) =$ $20 : 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. $AB = CB = 5\sqrt{2}$.

2) из $\triangle ABH$ $BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{50 - 32} = 3\sqrt{2}$

3) По свойству биссектрисы BD имеем:

$HK : HB = (AH - HK) : AB$ или

$HK : 3\sqrt{2} = (4\sqrt{2} - HK) : 5\sqrt{2} \Rightarrow HK = 1{,}5\sqrt{2}$

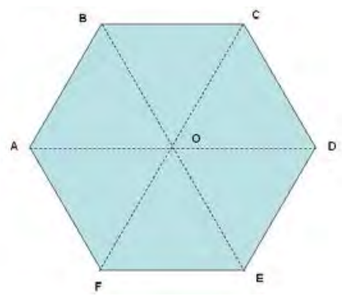
4) $S_\Delta = 0{,}5 \cdot HK \cdot HB = 0{,}5 \cdot 1{,}5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) свойства равнобедренного треугольника; 2) формулы площадей треугольника; 3)свойство биссектрисы.

31. Сторона правильного шестиугольника равна $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$. Найдите сторону равновеликого ему правильного треугольника.



Решение:

1) Так как шестиугольник правильный, то его площадь равна

$$S_6 = \frac{3\,a_6^{\,2}\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \left(\dfrac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

2) $S_3 = \dfrac{a_3^{\,2}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a_3 = 5$

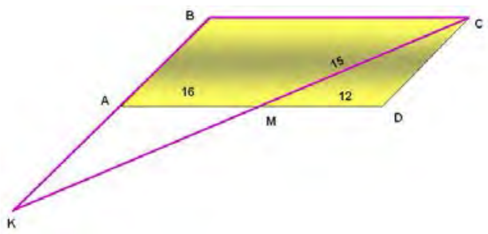
Ответ: 5.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) свойства правильного шестиугольника; 2) формула площади правильного шестиугольника; 3)формулы площади правильно-

го треугольника;

33. В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M и прямую AB в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если DM = 12, CM = 15, AM = 16.



Решение:

1) BC = AD = DM + MA = 12 + 16 = 28.

2) Так как CM – биссектриса,

то $\angle$ MCD = $\angle$ BCM, а $\angle$ BCM = $\angle$ CMD – как накрест лежащие при BC || AD и секущей CM $\Rightarrow$

$\angle$ CMD = $\angle$ MCD $\Rightarrow$ CD = DM = 12 $\Rightarrow$ AB = 12.

3) $\angle$ MCD = $\angle$ BKC = $\angle$ BCM $\Rightarrow$ BC = KB = 28.

4) $\triangle$ CMD ~ $\triangle$ KMA $\Rightarrow$

MC: MK = MD : AM; 15 : MK =12 : 16;

MK =20.

5) P_{KBC} = BC + KB + KC = 28 +28 + 15 + 20 = 91.

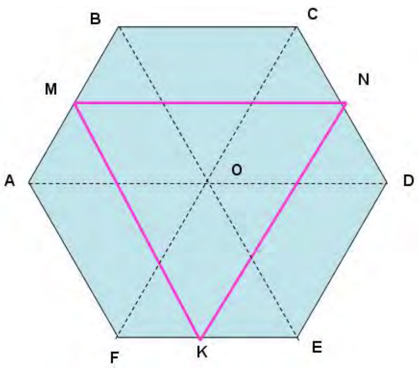
Ответ: 91.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) свойства параллельных прямых;

2)признаки подобия треугольников; 3) понятие периметра; 4) свойства параллелограмма.

34. (ДВ) Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K − середины сторон AB, CD, EF соответственно.



Решение:

1) Так как шестиугольник правильный, то OA = AB = R = $32\sqrt{3}$. AD = 2R $\Rightarrow$ 64 $\sqrt{3}$.BC | | AD, MN - средняя линия трапеции ABCD $\Rightarrow$ MN = 0,5(BC + AD) = = 0,5 ·96 $\sqrt{3}$ = 48 $\sqrt{3}$.
2) 2) MK и NLK – аналогично.
3) $S_{MNK} = MN^2 \cdot \sqrt{3} : 4$
4) S_{MNK} = 0,5· 3MN : r $\Rightarrow$

r = S_{MNK} : (0,5· 3MN) = $MN^2 \cdot \sqrt{3} : 4 : (0{,}5 \cdot 3MN)$ = = MN· $\sqrt{3}$: 6 = 48 $\sqrt{3}$ · $\sqrt{3}$: 6 = 48 : 2 = 24.

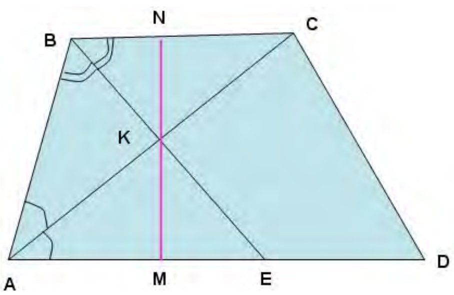
Ответ: 24.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) Свойства правильного шестиугольника; 23) формулы площадей треугольника; 4) свойства трапеции.

37. В трапеции ABCD диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если

AC = 18 $\sqrt{10}$, BE = 6 $\sqrt{10}$.



Решение:

$\angle$KAE = $\angle$BCK – накрест лежащие $\Rightarrow$ $\angle$BAK = $\angle$BCK $\Rightarrow$ $\triangle$ ABC – равнобедренный, CB = BA. Биссектриса BK – медиана и высота $\Rightarrow$ AK = KC = $9\sqrt{10}$ и $\angle$AKB = 90°.

$\angle$KBC = $\angle$KEA – накрест лежащие $\Rightarrow$ $\angle$ABK = $\angle$AEK $\Rightarrow$ $\triangle$ ABE – равнобедренный, AB = EA. Биссектриса AK – медиана и высота $\Rightarrow$ BK = KE = $3\sqrt{10}$ и $\angle$AKB = 90°.

Из $\triangle$AKB найдем AB: $AB = \sqrt{81 \cdot 10 + 9 \cdot 10} = 30$

Тогда CB = AB = AE = 30

$S_{AKC} = S_{BKC}$ = 0,5 AE · MK = 0,5 AK· KE $\Rightarrow$

MK= (AK · KE):AE = $9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}$: 30 = 9 $\Rightarrow$

MN = 9. Ответ: 9

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1Свойства биссектрисы;

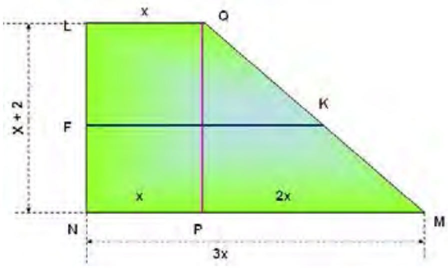
2) накрест лежащие углы при параллельных прямых;

3) свойства равнобедренного треугольника;

4) формулы площадей прямоугольного треугольника.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ В

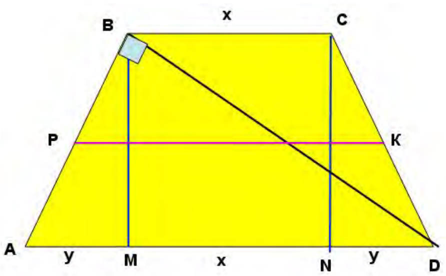
38. В выпуклом четырехугольнике MNLQ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс угла при вершине M равен $\frac{2}{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон NL и MQ, если известно, что сторона LQ втрое меньше стороны MN и на 2 меньше стороны NL.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки параллельности прямых; 2) понятие трапеции; 3) определение тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника; 4) средняя линия трапеции.

Решение:
1) Так как $\angle LNM = \angle NLQ = 90°$, то прямые NM и LQ параллельны по признаку параллельности прямых. Тогда MNLQ – прямоугольная трапеция.
2) Пуст LQ = x, тогда NM = 3x, LN = x + 2, PN = x, а PM = 2x.
3) из $\triangle$ MQP имеем: $tg\ M = \dfrac{QP}{PM} = \dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{2}{3}$
3x + 6 = 4x, x = 6.
4) средняя линия трапеции
FK = 0,5(LQ + NM) = 2 x = 2 · 6 = 12
Ответ: 12.

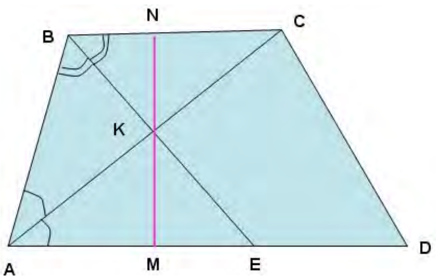
39. Высота равнобедренной трапеции равна 12; её средняя линия равна 16. Найти периметр трапеции, если известно, что её диагональ перпендикулярна боковой стороне.



Решение:
1) 2x + 2y = 2 PK $\Rightarrow$ x + y = PK = 16.
2) $\triangle$ BMD ~ $\triangle$ AMD по углам $\Rightarrow$
MD : BM = BM : AM, 16 : 12 = 12 : y $\Rightarrow$ y = 9.
3) по теореме Пифагора
$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$.
4) P = 2AB + 2(x + y) = 30 + 32 = 62.
Ответ: 62.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия прямоугольных треугольников; 2) свойства средней линии трапеции;

40. (ДВ) В трапеции *ABCD* диагональ *AC* является биссектрисой угла *A*. Биссектриса угла *B* пересекает большее основание *AD* в точке *E*. Найдите высоту трапеции, если *AC* = 8√5, *BE* = 4√5.

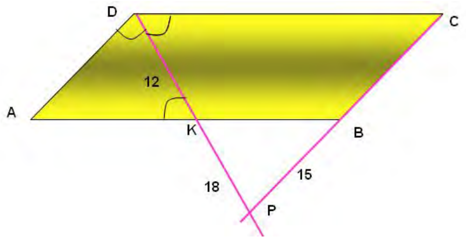


ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1Свойства биссектрисы;
2) накрест лежащие углы при параллельных прямых;
3) свойства равнобедренного треугольника;
4) формулы площадей прямоугольного треугольника.

Решение:
$\angle KAE = \angle BCK$ – накрест лежащие $\Rightarrow$ $\angle BAK = \angle BCK \Rightarrow \triangle$ ABC – равнобедренный, CB = BA. Биссектриса BK – медиана и высота $\Rightarrow$
AK = KC = 4√5 и $\angle AKB = 90°$.
$\angle KBC = \angle KEA$ – накрест лежащие $\Rightarrow$ $\angle ABK = \angle AEK \Rightarrow \triangle$ ABE – равнобедренный, AB = EA. Биссектриса AK – медиана и высота $\Rightarrow$ BK = KE =2 √5 и $\angle AKB = 90°$.
Из $\triangle$AKB найдем AB: $AB = \sqrt{16 \cdot 5 + 4 \cdot 5} = 10$
Тогда CB = AB = AE = 10.
$S_{AKC} = S_{BKC}$ = 0,5 AE · MK = 0,5 AK· KE $\Rightarrow$
MK= (AK · KE):AE = 4√5·2 √5 : 10 = 4 $\Rightarrow$ MN = 8
Ответ: 8.

41. (Реальный экзамен) В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр параллелограмма, если DK = 12, PK = 18, BP = 15.

Решение



1) Так как DK – биссектриса, то $\angle ADK = \angle KDC$, а $\angle KDC = \angle DKA$ – как накрест лежащие при $BA \,||\, CD$ и секущей DK, $\angle AKD = \angle PKB$ (вертикальные), $\angle ADK = \angle BPK$ как накрест лежащие при $BC \,||\, AD$ и секущей DP $\Rightarrow$ $\triangle KDP$ – равнобедренный $\Rightarrow BP = KB = 15$

2). $\triangle CMD \sim \triangle KMA$ по двум углам $\Rightarrow$

AD: PB = AK : KB = DK : KP; AD: 15 = 12 : 18 $\Rightarrow$AD =10

$\Rightarrow$ AK = 10. Тогда AB = 10 + 10 = 20.

3) $P_{ABCD} = AD + DC + BC + AB = 10 + 20 + 10 + 20 = 60$.

Ответ: 60.

<u>ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ</u>

1) свойства параллельных прямых;
2)признаки подобия треугольников; 3) понятие периметра; 4)свойства параллелограмма.

42. С$_4$ (ДВ) На стороне ВА угла АВС, равного 30°, взята точка D, что AD = 2 и BD = 1. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой ВС.

Решение:

1) Пусть окружность с центром в точке О касается прямой ВС в точке Р и пересекает сторону ВА в точках А и D. Тогда $OP \perp BC$ и ОК – серединный перпендикуляр отрезка AD,
АК = КD = 1.

2) По теореме о касательной и секущей

$BP^2 = BD \cdot BA$, $BP^2 = 1 \cdot 3 = 3$, $BP = \sqrt{3}$.

3) Отрезок ВК = 2,

$BE = BK : \cos 30° = 2 : 0{,}5\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, тогда

Из рис 1: $PE = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Из рис 2: $PE = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

4) $OP \perp BC$ и $OK \perp BA$, тогда $\angle ABC = \angle POE = 30°$.

$OP = PE : \operatorname{tg} \angle POE = PE : \operatorname{tg} 30°$.

Из рис 1: $OP = \dfrac{\sqrt{3}}{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$.

Из рис 2: $OP = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 7$. Ответ: 1 или 7.

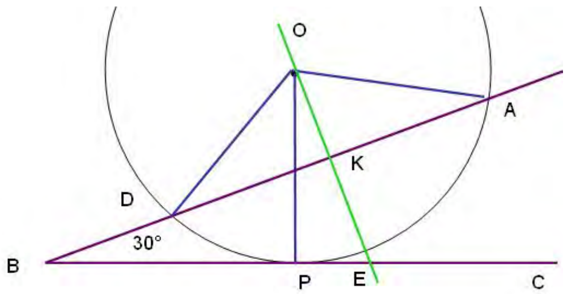
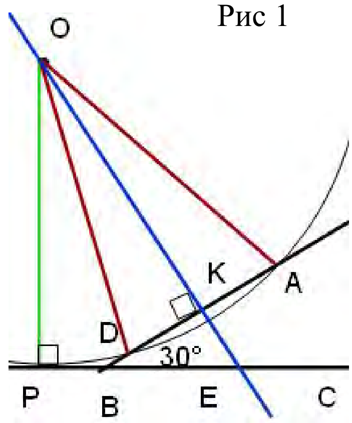
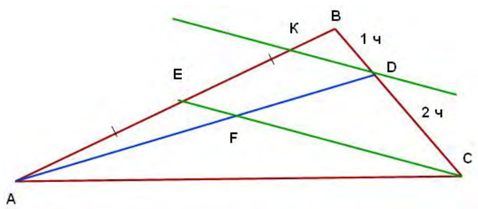


Рис 1

Рис 2



43. С$_4$ В треугольнике АВС на стороне ВС выбрана точка D так, что BD : DC = 1: 2. Медиана СЕ пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника АВС составляет площадь треугольника AEF.



<u>*Решение:*</u> 1) $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}$, так как $BD = \dfrac{1}{3} BC$.

2) Построим $DK \,||\, CE$, тогда по теореме Фалеса BK : KE = 1 : 2, т.е. если KB = x, то KE = 2x, BE = AE =3x $\Rightarrow$

$S_{\Delta AKD} = \dfrac{5}{6} S_{\Delta ABD} = \dfrac{5}{18} S_{\Delta ABC}$

2). $\triangle AKD \sim \triangle EFA$ по двум углам $\Rightarrow$

$S_{\Delta AEF} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 S_{\Delta AKD} = \dfrac{9}{25} \cdot \dfrac{5}{18} S_{\Delta ABC} = 0{,}1 S_{\Delta ABC}$

Ответ: 0,1.

<u>ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ</u>

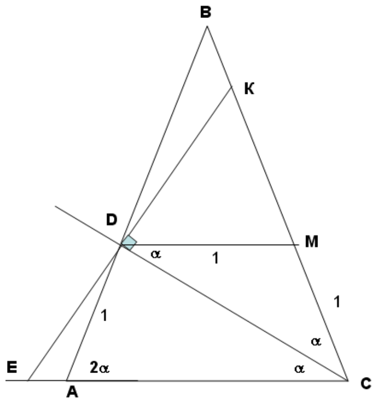
1) свойства параллельных прямых;
2)теорема Фалеса; 3) отношение площадей подобных треугольников;.

Решение задач тематического сборника

1.1. Треугольник

1.1.6. (Свойство равнобедренного треугольника, средняя линия треугольника)
В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через D, пересекает AC в точке E. (ГИА ТВ № 6 от А. Ларина)

Решение



<u>*1 способ*</u>

1)Пусть $\angle DAC = \alpha$, тогда $\angle DCM = \alpha$, так как DC - биссектриса;

2) Проведем DM || AC, тогда

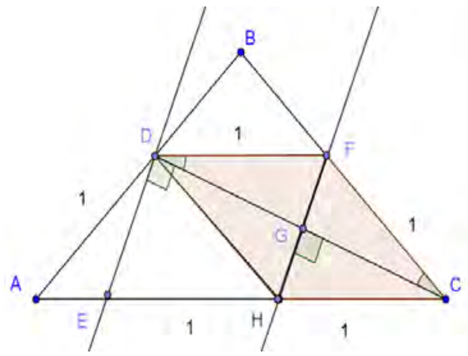
- CM = AD = 1, так как ΔABC – равнобедренный $\Rightarrow$ трапеция ADMC – равнобедренная трапеция, и
- $\angle CDM = \alpha$ - как накрест лежащий углу $\angle CDA$, тогда ΔDMC – равнобедренны, DM = MC = 1;

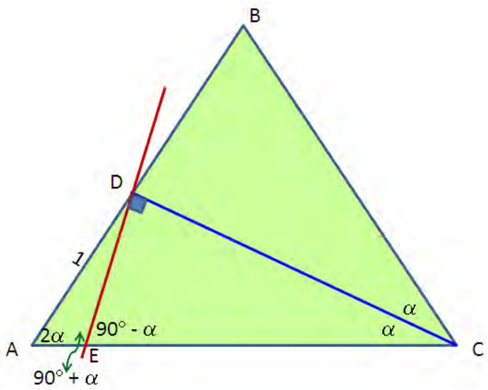
3) $DC \perp EC$, по условию, тогда CD – высота и биссектриса в ΔEKC, а следовательно и медиана, а прямая DM – средняя линия треугольника EKC, тогда CE = 2.

Ответ: EC = 2

2 способ:

1)Аналогично, построить DF // AC, DH // FC, следовательно DHCF – ромб, так как диагональ DC - биссектриса, ADFC – равнобедренная трапеция, а следовательно HC = FC = DF = AD = 1;
2) По свойству ромба $HF \perp DC$, а следовательно HF // DE, тогда EDFH – параллелограмм, EH = 1, а CE = 2.
Ответ: EC = 2.





<u>***3 способ:*** *(*</u>с помощью тригонометрии)

1) Из Δ ADE по теореме синусов $\frac{AD}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{DE}{\sin 2\alpha}$;
DE = $\frac{AD \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2AD\sin\alpha$.
2) Из прямоугольного треугольника EDC $\sin\alpha = \frac{DE}{EC}$;
EC = $\frac{DE}{\sin\alpha} = \frac{2AD \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha}$ = 2AD = 2.

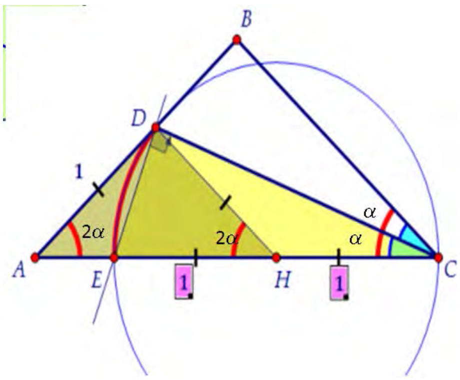
Ответ: EC = 2.

4 способ (от О. Себаш) с помощью окружности

1) Так как ΔEDC – прямоугольный, то около него описывается окружность с центром в точке H, середина CE и радиусом HE = HC = HD.

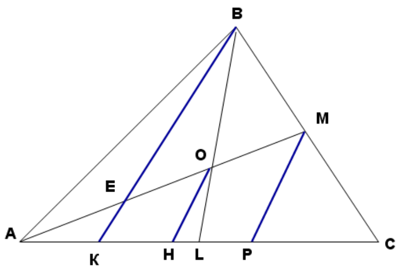
2) Пусть $\angle DAE = \alpha$, тогда $\angle DAC = \angle DHE = 2\alpha$, DH = 1, DH = EH = HC = 1, EC = 2.

Ответ: 2.



1.1.7.(Средняя линия треугольника, теорема Фалеса)

Точки K и L лежат на стороне AC треугольника ABC. Прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части. Найти длину стороны AC, если KL = 6.



Рекомендации:

1)Так как прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части, то AO = 2 OM ⇒ O – точка пересечения медиан ⇒ BL – медиана треугольника и AL = LC.

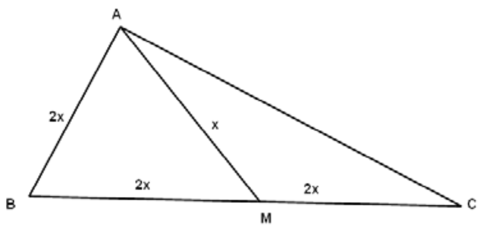
2) Постройте OH и MP параллельные BK. Обозначьте AK = x и выразите все отрезки через x.

4)MP – средняя линия ΔBKC, тогда KP = PC = 2x.

Ответ: 20.

1.1.8.Найдите величины углов треугольника ABC, если известно, что медиана AM в 4 раза меньше стороны BC, а треугольник ABM – равнобедренный.

Рекомендации: Вычисляйте угол по теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



Ответ: $\angle A = 180° - \arccos\frac{3\sqrt{6}}{8} - \arccos\frac{7}{8}$, $\angle B = \arccos\frac{7}{8}$, $\angle C = \arccos\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

1.1.10. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу треугольника, подобного данному, если один из катетов равен 10.

Рекомендации:

используйте подобие и найдите отношения,

По отношениям - искомый отрезок. Так как не указано, какой катет равен 10, то это может быть один или другой – два варианта решения.

Ответ: $\frac{125}{12}$ *или* $\frac{250}{7}$.

1.1.11. (ЕГЭ-2012) На прямой, содержащей медиану треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удалённая от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если BC = 6, AC = 4.

Рекомендации: Используйте подобие треугольников.

Ответ: 2,4; 21,6.

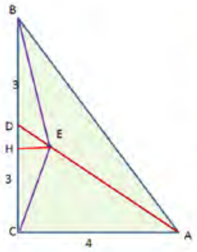


Рис.1

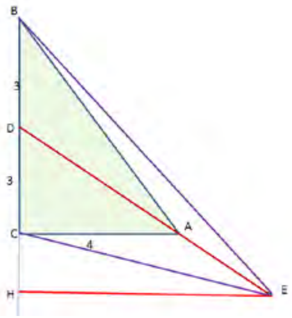
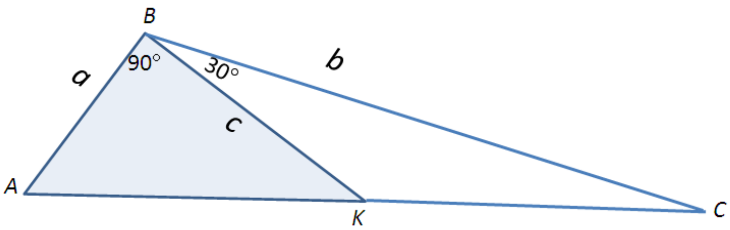


Рис.2

1.1.12.(ГИА)Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30 и 90°.

Ответ: AB : BC = 1 : 2



Рекомендации: Так как BK – медиана, то площади треугольников ABK и KBC равны.

1.1.13. (ТВ № 9-2012 от А.Л.)Все вершины квадрата лежат на сторонах равнобедренного треугольника ABC, основание AC которого равно 12, а боковая сторона AB равна 10. Найдите сторону квадрата.

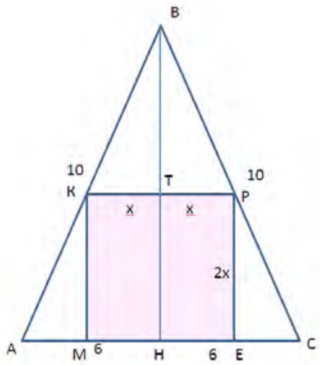


Рис. 1

Рекомендации

Рис. 1: BH = 8; ΔABH ~ΔBKT

Рис.2: ΔAKM - равнобедренный, AK = KM = x; ΔAKM ~ΔABC,

Ответ: 4,8; $\frac{240}{49}$

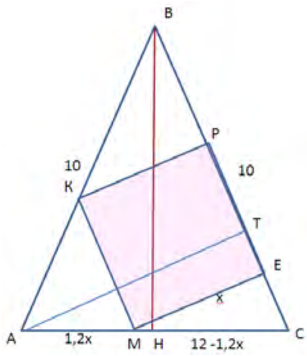


Рис.2

1.1.14.(ТВ №10 2012 от А.Л.) В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

Решение:

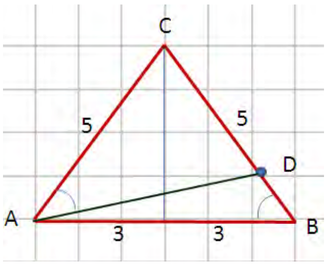


Рис.1

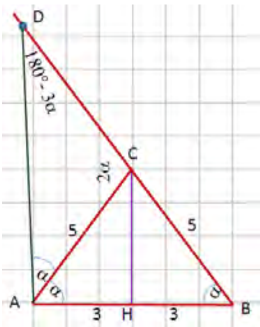


Рис.2

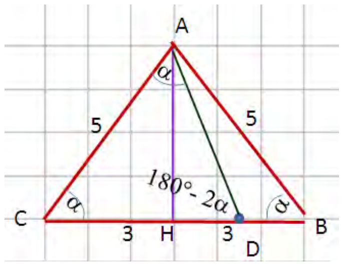


Рис. 3

Ответ: $\frac{25}{6}$; $\frac{150}{11}$.

1.1.19. (ТВ№37-2013, А. Ларин.) В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

Решение:

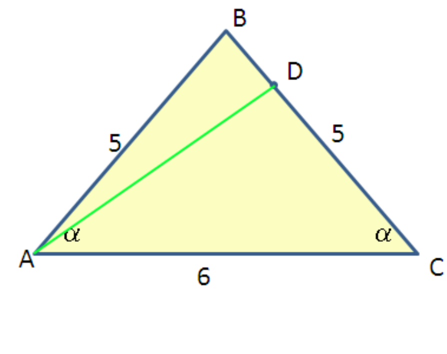


Рис.1

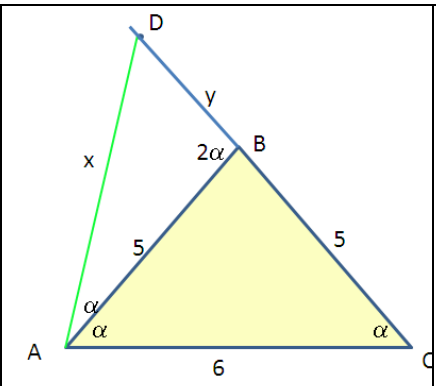


Рис.2

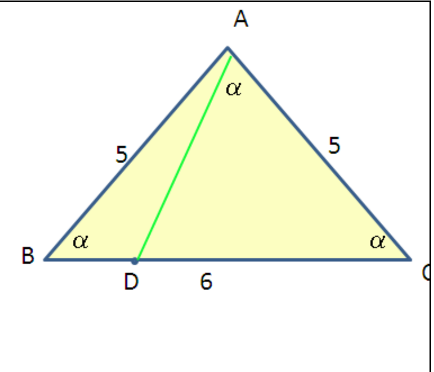
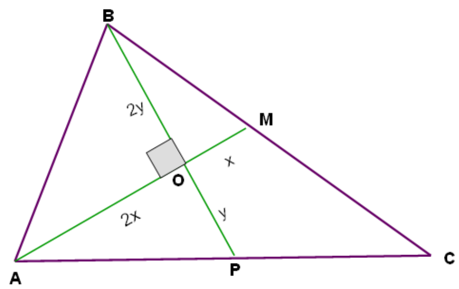


Рис.3

Ответ: $\frac{150}{11}$; $\frac{25}{6}$.

1.2.Медианы треугольника

1.2.1. (2010) Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 3, BC = 4, а медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.



<u>*Решение*</u>:

Так как BP – медиана, то $S_{ABP} = S_{PBC}$, $S_{ABC} = 2\cdot S_{ABP}$.

1) Так как AM и BP – медианы, то точка O делит медианы в отношении 2 : 1 начиная от вершины треугольника, тогда если OM = x, то AO = 2x и OP = y, то BO = 2y.

Тогда получим систему уравнений $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ 4x^2+y^2=2{,}25 \end{cases}$.

Из системы находим x и y:

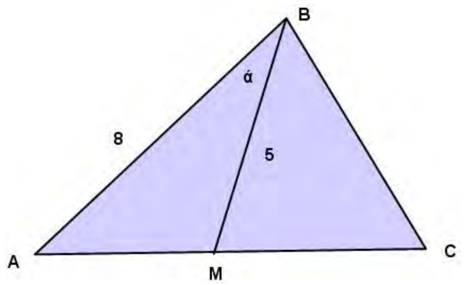
$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $y = \sqrt{\frac{2{,}75}{3}}$. Тогда $S_{ABP} = \frac{1}{2}\cdot 2x\ \ 3y = 3\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2{,}75}{3}}$;

$S_{ABC} = 2\cdot 3\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2{,}75}{3}} = \sqrt{11}$

Ответ: $\sqrt{11}$.

1.2.2.(2003) Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5. (Демовариант_03)

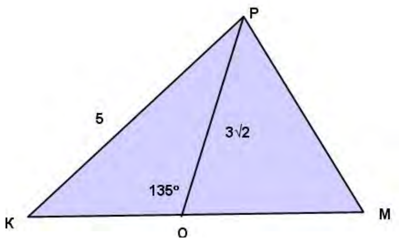
<u>*Решение*</u>:



Так как BM – медиана, то $S_{ABM} = S_{BMC} = 10\sqrt{3} =$
$= 0{,}5\ AB \cdot BM \cdot \sin\alpha.$
$\sin\alpha = 10\sqrt{3} : (0{,}5 \cdot 8 \cdot 5) = \sqrt{3} : 2 \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow AM = \sqrt{64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7.$
$AC = 2 \cdot AM = 14.$
Ответ: 14.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 3) значения тригонометрических функций некоторых углов.

1.2.3. Найти площадь треугольника KMP, если сторона KP равна 5, медиана PO равна $3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135°$.

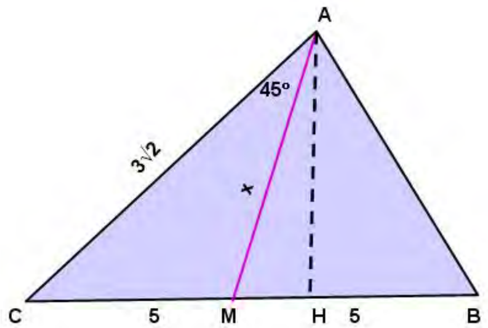


Решение:
По теореме косинусов найдем KO:
$PK^2 = KO^2 + OP^2 - 2 \cdot KO \cdot OP \cdot \cos 135°.$
$25 = KO^2 + 18 + 6, \Rightarrow KO^2 = 1, KO = 1.$
$S_{KPO} = S_{POM} = = 0{,}5\ KO \cdot OP \cdot \sin 135° =$
$= 0{,}5 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 0{,}5\sqrt{2} = 0{,}5 \cdot 3 \Rightarrow S_{KPM} = 2 \cdot S_{KOP} = = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 3 = 3.$

Ответ: 3.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 3) значения тригонометрических функций некоторых углов. 4) свойства медианы равнобедренного треугольника.

1.2.4. (Демовариант_2005)В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

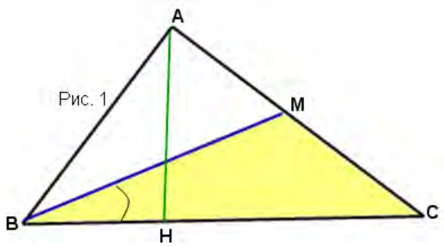


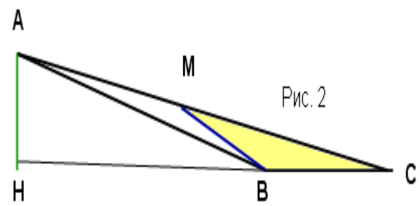
Решение:
По теореме косинусов
$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cdot \cos 45° =$
$= 18 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}5 = 25,$
$x^2 - 6x - 7 = 0,\ x_1 = -1;\ \ x_2 = 7 \Rightarrow AM = 7.$
$S_{ACM} = 0{,}5 \cdot AC \cdot AM \cdot \sin 45° = 0{,}5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 0{,}5 \cdot 21;$
$S_{ACM} = S_{ABM} = 0{,}5 \cdot 21 \Rightarrow$
$S_{ABC} = 2 \cdot S_{ACM} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 21 = 21$
Ответ: 21.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) теорема косинусов; 2) формулы площадей треугольника; 4) значение тригонометрических функций некоторых углов.

1.2.5. (2010) Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.

Решение:





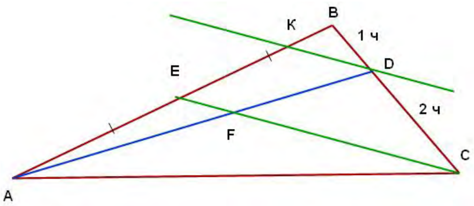
1 случай: Треугольник остроугольный. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$,

$S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot BC \cdot AH$ или $S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BM \cdot \sin\angle MBC$, тогда

$\frac{1}{4} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BM \cdot \sin\angle MBC$, откуда $\sin\angle MBC = \frac{1}{2}$, $\angle MBC = 30°$ или $150°$.

Ответ: 30° или 150°.

1.2.6. (2010г.) В треугольнике *ABC* на стороне *BC* выбрана точка *D* так, что BD : DC = 1 : 2.. Медиана *CE* пересекает отрезок *AD* в точке *F*. Какую часть площади треугольника *ABC* составляет площадь треугольника *AEF*?



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства параллельных прямых;
2)теорема Фалеса; 3) отношение площадей подобных треугольников.

Ответ: 0,1.

Решение:

1) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$, так как $BD = \frac{1}{3} BC$.

2) Построим $DK \parallel CE$, тогда по теореме Фалеса BK : KE = 1 : 2, т.е. если KB = x, то KE = 2x,

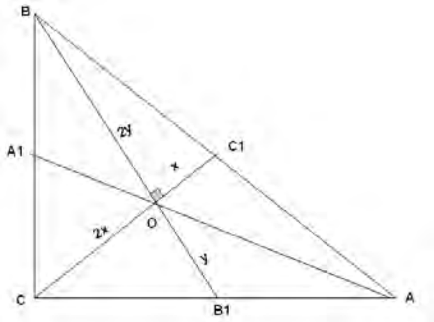
$BE = AE = 3x \Rightarrow S_{\Delta AKD} = \frac{5}{6} S_{\Delta ABD} = \frac{5}{18} S_{\Delta ABC}$

2).$\triangle AKD \sim \triangle EFA$ по двум углам $\Rightarrow$

$S_{\Delta AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{\Delta AKD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{18} S_{\Delta ABC} = 0{,}1 S_{\Delta ABC}$

1.2.7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы CC_1 и BB_1 перпендикулярны друг другу. Найдите длину большей из этих медиан, если длина третьей медианы $AA_1 = 3\sqrt{3}$.

Решение:



1) Так как медианы $CC_1 \perp BB_1$, то из ΔBOC_1

$C_1B = C_1A = \sqrt{2y^2 + x^2}$, $CB = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, тогда CA_1

$= \sqrt{x^2 + y^2}$, $CB_1 = \sqrt{4x^2 + y^2}$, а $CA = 2\sqrt{4x^2 + y^2}$.

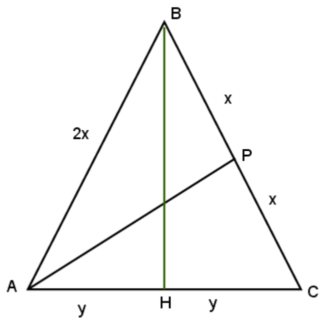
2) Из ΔAA_1C, по теореме Пифагора имеем:
$AC^2 + CA_1^2 = AA_1^2$ или $4(4x^2 + y^2) + x^2 + y^2 = 27$, $17x^2 + 5y^2 = 27$.(1)
Из ΔBB_1C имеем: $9y^2 = 4x^2 + y^2 + 4x^2 + 4y^2$,
$8x^2 = 4y^2$, $2x^2 = y^2$, подставим в уравнение (1)

$27x^2 = 27$, $x = 1$, $y = \sqrt{2}$, тогда $BB_1 = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 3$, большая медиана BB_1.

Ответ: $BB_1 = 3\sqrt{2}$.

1.2.8. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?.

Решение:



<u>*1 случай*</u>: Пусть 2x > 2y.

$x + 2x = 7,\ \ x = \frac{7}{3},\ \ 2y = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3},\ \ y = \frac{4}{3}.$

$BH = \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{16}{9}} = 2\sqrt{5},\qquad S = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot 2\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$

<u>*2 случай*</u>: Пусть 2x < 2y.

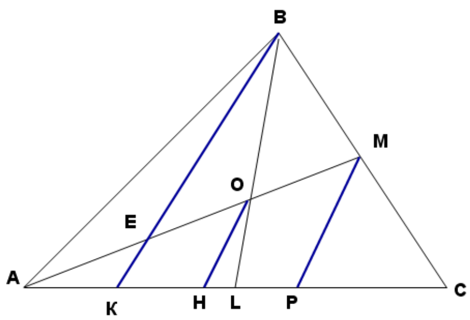
$x + 2x = 5,\ \ x = \frac{5}{3},\ \ 2y = 5 - \frac{7}{3} = \frac{16}{3},\ \ y = \frac{8}{3}.$

$BH = \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{64}{9}} = 2,\qquad S = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot 2 = \frac{16}{3}.$

Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{3}$; $\frac{16}{3}$.

1.2.9. Точки K и L лежат на стороне AC треугольника ABC. Прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части. Найти длину стороны AC, если KL = 6.

<u>*Решение:*</u>



1)Так как прямые BK и BL пересекая медиану AM, делят её на три равные части, то AO = 2 OM ⇒ O – точка пересечения медиан, ⇒ BM – медиана треугольника и AL = LC.
2)Пусть AK = x, тогда KL = LC = 6 + x, а AC = 12 + 2x. 3) Через точки E, O и M проведем прямые OH, MP – параллельные BK, тогда по теореме Фалеса
AK = KH = HP = x, а KP = 2x,
4)MP – средняя линия ΔBKC, тогда KP = PC = 2x.

5) Получили, что AC = AK + KP + PC = x + 2x + 2x = 5x. Получилось уравнение: 5x = 12 + 2x,
3x = 12, x = 4, AC = 20.
Ответ: 20.

1.2.10. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\frac{MH}{BH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

<u>*Решение:*</u>

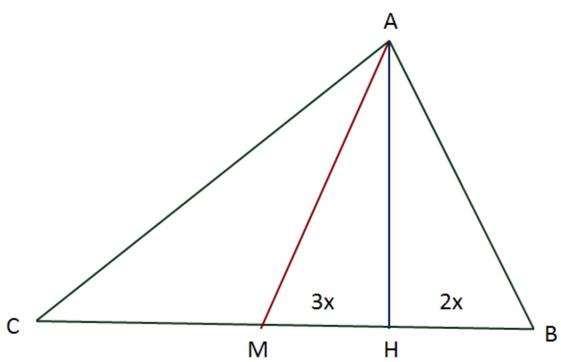


Рис.1

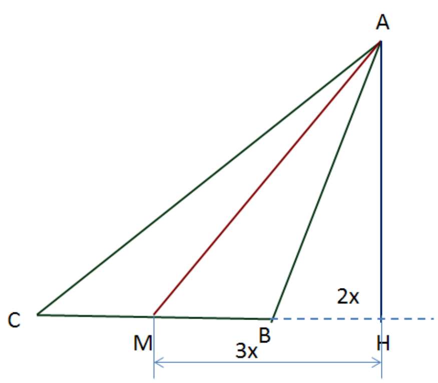


Рис. 2

1 случай: (Рис.1)
1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CB \cdot AH$; $CB = CM + MB = 10x$; Пусть $AH = y$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 10x \cdot y$;
$S_{\Delta ABC} = 5xy$.

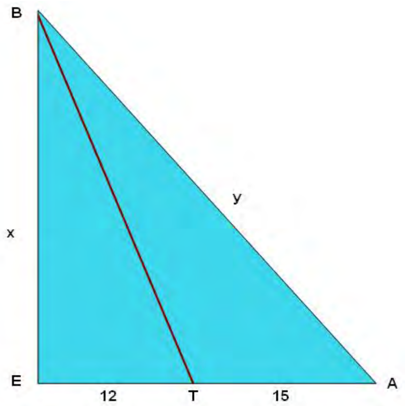
2) $S_{\Delta AMH} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3x\ y$; $xy = 2 \cdot S_{\Delta AMH} : 3 = 2 \cdot 24 : 3 = 16$.
3) $S_{\Delta ABC} = 5xy = 5 \cdot 16 = 80$.
2 случай: (Рис. 2)
1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot AH$; $CB = CM + MB = 2(3x - 2x) = 2x$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = xy$;
2) $S_{\Delta AMH} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3x\ y$; $xy = 2 \cdot S_{\Delta AMH} : 3 = 2 \cdot 24 : 3 = 16$.
3) $S_{\Delta ABC} = xy = 16$.

Ответ: 80 или 16.

1.3. Биссектрисы треугольника

• *Биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон.*

1.3.1.В прямоугольном треугольнике ABE с прямым углом E проведена биссектриса BT, причем AT = 15, TE = 12. Найдите площадь треугольника ABT.

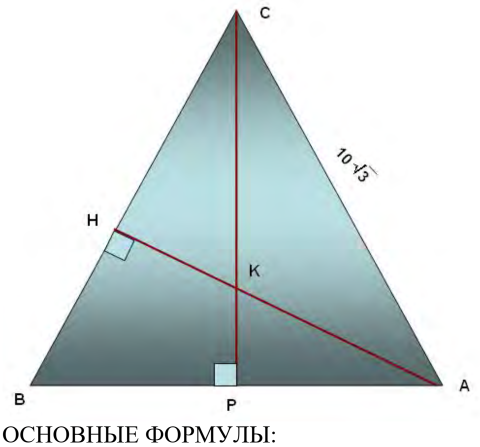


Решение:
1. По свойству биссектрисы ET : BE = AT : AB,
$12 : x = 15 : y \Rightarrow x = 0{,}8\ y$
2. Из Δ BAE имеем $x^2 + 27^2 = y^2$ или
$0,64y^2 + 27^2 = y^2$, $0,6^2\ y^2 = 27^2$ или $0,6\ y = 27$,
$y = 45$, а $x = 0{,}8 \cdot 45 = 36$.
3. $S_{ATB.} = 0{,}5 \cdot AT \cdot BE = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 36 = 270$

Ответ: 270

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) свойства биссектрисы; 2) теорема Пифагора. 3) площадь треугольника.

1.3.2. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь CKH.



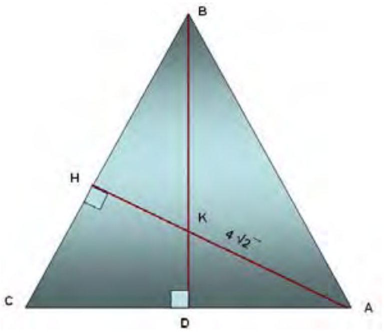
Решение:
1. Так как треугольник равнобедренный, то CA = BC $\Rightarrow$
$S_{ACB.} = 0{,}5 \cdot AC \cdot AH = 90 \Rightarrow$
$AH = 90 : 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
2. По теореме Пифагора найдем CH из ΔCAH:
$$CH = \sqrt{CA^2 - AH^2} = \sqrt{300 - 108} = 8\sqrt{3}$$
3. По свойству биссектрисы KH : CH = AK : AC,
$KH : 8\sqrt{3} = (6\sqrt{3} - KH) : 10\sqrt{3}$
$10\sqrt{3} \cdot KH = 8\sqrt{3} \cdot (6\sqrt{3} - KH) \Rightarrow KH = 8\sqrt{3} : 3$
4. $S_{CKH.} = 0{,}5 \cdot CH \cdot KH = (0{,}5 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}) : 3 = 32$

Ответ: 32.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) свойства биссектрисы; 2) теорема Пифагора.
3) площадь прямоугольного треугольника;

4) свойства равнобедренного треугольника.

1.3.3. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 20. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BD и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника BKH, если AH = 4 $\sqrt{2}$.



Решение:

1) S_{ABC} = 0,5 · AH· CB = 20 $\Rightarrow$ CB = 20 : (0,5 · AH) = 20 : 2 $\sqrt{2}$ = 5 $\sqrt{2}$.   AB = CB = 5 $\sqrt{2}$.

2) из $\triangle$ABH $BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{50-32} = 3\sqrt{2}$

3) По свойству биссектрисы BD имеем:
HK : HB = (AH - HK) : AB   или
HK :3 $\sqrt{2}$ = (4 $\sqrt{2}$ - HK) : 5 $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ HK = 1,5 $\sqrt{2}$

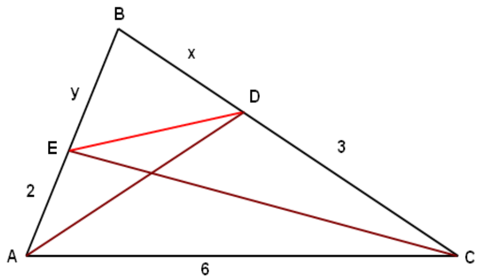
4) S_Δ = 0,5· HK· HB = 0,5· 1,5 $\sqrt{2}$ · 3 $\sqrt{2}$ = 4,5.

Ответ: 4,5.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства равнобедренного треугольника;
2) формулы площадей треугольника;
3)свойства биссектрисы.

1.3.4. (, 2010г) В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если *AC* = 6, *AE* = 2, *CD* = 3.

Решение:



1) По свойству биссектрисы получим:

$\frac{3}{6} = \frac{x}{y+2}$ $\Rightarrow$ y + 2 = 2x,   y = 2x – 2.

$\frac{2}{6} = \frac{y}{x+3}$ $\Rightarrow$ x + 3 = 3y. Получили систему:

$\begin{cases} x+3=3y \\ y=2x-2 \end{cases}$. Отсюда x = 1,8,   y = 1,6.

2) AB = 2 + 1,6 = 3,6; CB = 3 + 1,8 = 4,8. $AB^2 + CB^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$ $\Rightarrow$ ΔABC – прямоугольный с $\angle ABC = 90°$.

3) По теореме Пифагора $DE^2 = x^2 + y^2 = 1{,}6^2 + 1{,}8^2$ = 2,56 + 3, 24 = 5,8. Тогда DE = $\sqrt{5{,}8}$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

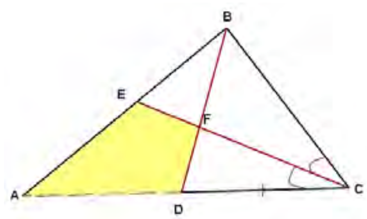
1.3.5. В треугольнике ABC, площадь которого S, биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке F. Найдите площадь четырехугольника ADEF, если BC = *a*, AC = b.

Решение:

1)Так как CE – биссектриса, то AE : BE = AC : BC или AE : BE = b : *a*.
Треугольники AEC и BEC имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины C на прямую AB, тогда $S_{AEC} : S_{BEC}$ = b : *a* или

$S_{AEC} = \frac{b}{a} \cdot S_{BEC}$; $S_{AEC} = \frac{b}{a}(S - S_{AEC})$. Тогда

$S_{AEC} = \frac{S \cdot b}{a+b}$.



2) Так как BD – медиана, то площадь треугольника BDC равна половине площади треугольника ABC, то есть $S_{BDC} = 0{,}5\cdot S$.
DF : BF = 0,5b : a.
Треугольники DFC и BFC имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины C на прямую DB, тогда $S_{DFC} : S_{BFC} = 0{,}5b : a$ или

$$S_{DFC} = \frac{b}{2a}\cdot S_{BFC};\quad S_{DFC} = \frac{b}{2a}\left(\frac{S}{2} - S_{AFC}\right).\quad \text{Тогда } S_{DFC} = \frac{S\cdot b}{2\cdot(2a+b)}.$$

$$3)\ S_{ADFE} = S_{AEC} - S_{DFC} = \frac{S\cdot b}{a+b} - \frac{S\cdot b}{2\cdot(2a+b)} = \frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)\cdot(2a+b)}$$

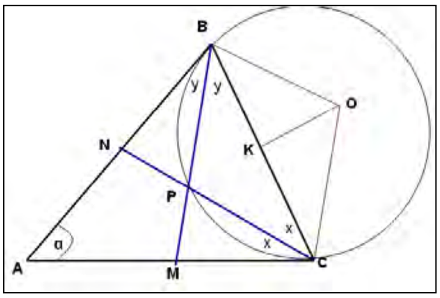
Ответ: $\dfrac{Sb(3a+b)}{2(a+b)\cdot(2a+b)}$.

1.3.6. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен α, сторона *BC* равна a, *P*— точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BPC*.

Решение:
O – центр описанной около ΔBCP окружности, OC – радиус, OK – серединный перпендикуляр к стороне BC, тогда KC = 0,5 a .
1) Так как сумма углов треугольника 180°, то $\angle ACB + \angle CBA = 180° - \alpha$. CN и BM – биссектрисы, тогда x + y = 0,5 (180° - α), то есть дуга BPC равна 180° - α, а

$$\angle COK = 0{,}5\,(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle OCK = \frac{\alpha}{2}.$$



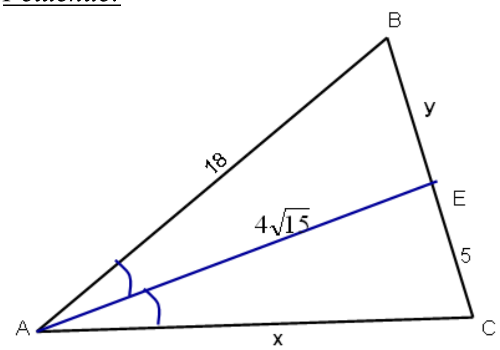
2) Из ΔOCK имеем:

$$\cos\angle OCK = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{KC}{OC},\quad OC = \frac{KC}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

1.3.7. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определите периметр треугольника ABC.

Решение:

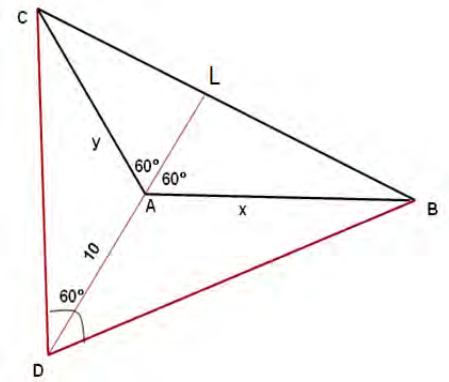


1) По свойству биссектрис имеем: 5 : x = y : 18, и
$AE^2 = AC\cdot AB - CE\cdot BE$ или $16\cdot 15 = 18x - 5y$;
2) $y = \dfrac{90}{x}$, тогда $18x^2 - 16\cdot 15x - 5\cdot 90 = 0$,
$3x^2 - 8\cdot 5x - 5\cdot 15 = 0$, $3x^2 - 40x - 75 = 0$,
$D = 400 + 225 = 625$.

$x_1 = 15$, $x_2 < 0$, тогда y = 90 : 15 = 6, P = 15 + 5 + 6 + 18 = 44
Ответ: 44.

1.3.8. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что AD = 10, $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение:



1) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} x \cdot y \cdot \sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{4} xy$,

$S_{BDC} = \dfrac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot DB \cdot DC$,

$S_{DAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot x \sin 120° = 5x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$S_{DAC} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot y \sin 120° = 5y \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$S_{BDC} = S_{ABC} + S_{DAB} + S_{DAC}$, $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot DB \cdot DC = \dfrac{\sqrt{3}}{4} xy + 5x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 5y \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$DB \cdot DC = xy + 10x \cdot + 10y$(1).

2) По теореме косинусов находим:

из ΔBDC, $CB^2 = DB^2 + DC^2 - DB \cdot DC$, $\quad DB \cdot DC = DB^2 + DC^2 - CB^2$ (2),

<u>*из ΔBDA*</u>, $DB^2 = 100 + x^2 + 10x$; <u>*из ΔBDC*</u>, $DC^2 = 100 + y^2 + 10y$; из <u>*ΔBCA*</u>, $CB^2 = x^2 + y^2 + xy$.

3)Подставим полученные равенства в уравнение (2) и получим:

$DB \cdot DC = 100 + x^2 + 10x + 100 + y^2 + 10y - x^2 - y^2 - xy = 200 + 10x + 10y - xy$.

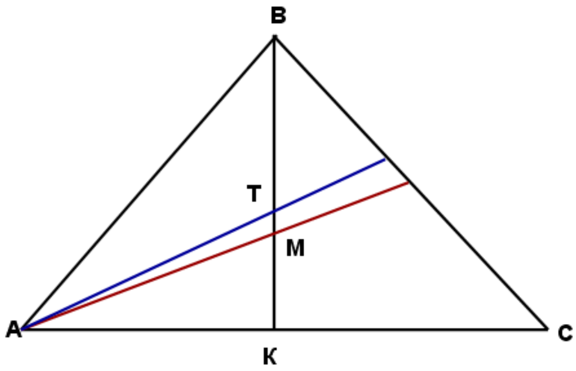
4) Равенство (1) принимает вид: $200 + 10x + 10y - xy = xy + 10x + 10y$, $\quad xy = 100$,

$S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100 = 25\sqrt{3}$

Ответ: $25\sqrt{3}$.

1.3.9. В равнобедренном треугольнике ABC, в котором AB = BC = 10, AC = 16, найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис.

Решение:



1) Так как треугольник равнобедренный, то BK – медиана , высота и биссектриса. Тогда по теореме Пифагора BK = 6.

2) По свойству медиан, точка пересечения M медиана делит медиану на части 2 : 1, начиная от вершины треугольника, тогда BM = 2, MK = 2.

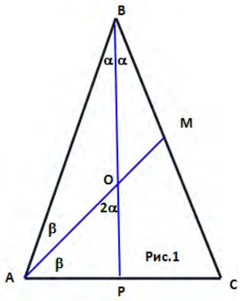
3)По свойству биссектрис, биссектриса AT делит отрезок BM на части пропорциональные прилежащим сторонам, то есть

$\dfrac{TK}{AK} = \dfrac{TB}{AB}$ или $\dfrac{x}{8} = \dfrac{6-x}{10}$, отсюда $10x = 48 - 8x$, $18x = 48$, $x = \dfrac{8}{3}$, где $x = TK$, тогда

$TM = TK - KM = \dfrac{8}{3} - 2 = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

1.3.10. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.



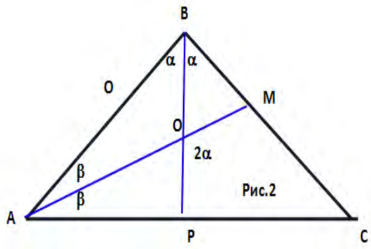
Решение:

Рис. 1. Пусть ∠ABP = ∠PBC = α, тогда ∠AOP = 2α; Из ΔABP имеем α + 2β = 90°, а из ΔAOP : 2α + β = 90°. Решим систему и получим α = 30°, β = 30°. Тогда ∠A = ∠B = ∠C =60°.

Рис. 2. Пусть ∠ABP = ∠PBC = α, тогда ∠AOB = 2α;

Из ΔABP имеем α + 2β = 90°,

а из ΔAOP : 180°- 2α + β = 90°. Решим систему и получим α = 54°, β = 18°. Тогда ∠A = ∠C =36°, *∠B =108°*



Ответ: 36°, 36°, 108° или 60°, 60°, 60° .

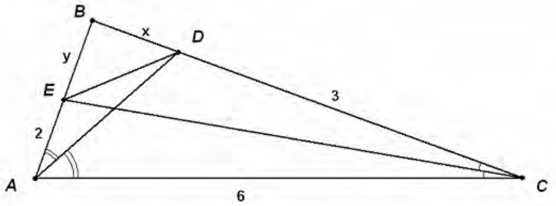
1.3.11. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если *AC* = 6, *AE* = 2, *CD* = 3.

Решение. Обозначим $BD = x$, $BE = y$. По свойству биссектрисы получаем $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$ или $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{6}$ и $\frac{2}{y} = \frac{6}{x+3}$.

Из решения системы

$$\begin{cases} 6x = 3y + 6 \\ 2x + 6 = 6y \end{cases}$$

находим $x = 1{,}8$ и $y = 1{,}6$. Тогда $BC = 4{,}8$ и $AB = 3{,}6$.



Так как $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 6^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, имеем $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = x^2 + y^2 = 1{,}6^2 + 1{,}8^2 = 5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

1.3.12. В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\frac{MK}{KL} = \frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$ а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

Решение:

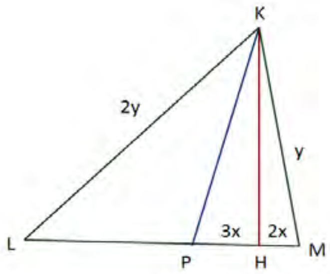


Рис. 1

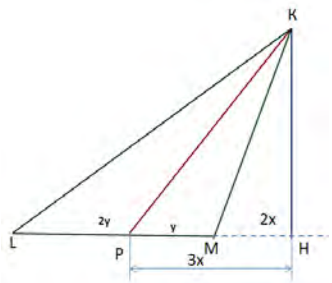


Рис. 2

1 случай: (Рис. 1)

1)Пусть KH = h, тогда $S_{\Delta KPH} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot h$; $x \cdot h = 2 \cdot 30 : 3 = 20$. **<u>x· h =20</u>**

2) $S_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot KH$; LM = LP + PM; $\frac{MK}{KL} = \frac{PM}{PL} = \frac{1}{2}$, тогда PM =y = 5x, а

LP = 2y = 10x, LM = 5x + 10x = 15 x; $S_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot 15x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$.

2 случай: (Рис. 2)

1) $S_{\Delta KPH} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot h$; **<u>x· h =20.</u>**

2) PM = y = 3x – 2x = x, LP = 2y = 2x, LM = 3x. $S_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot KH = \frac{1}{2} 3x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$.

Ответ: 150 или 30.

1.4. Высоты треугольника

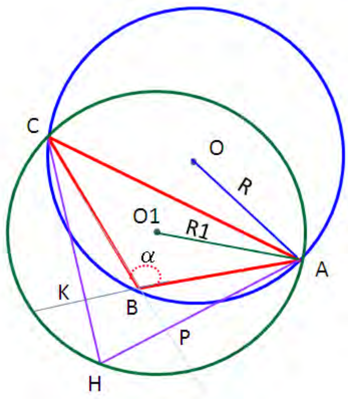
1. *Точка пересечения высот треугольника называется – ортоцентром.*
2. *Если H – ортоцентр треугольника, то точки A, B и C – точки пересечения высот треугольников ABH, BCH, ACH.*
3. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*
4. *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).*

Доказательство п.3:

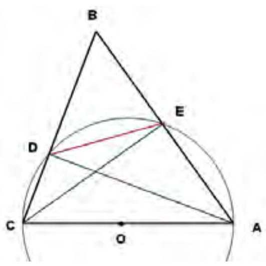
1)Пусть O – центр окружности, описанной около ΔABC, а R – радиус описанной около треугольника ΔABC окружности.
По теореме синусов $2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AC}{\sin\alpha}$, $R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.

2)H – точка пересечения высот ΔABC, O_1 – центр окружности, описанной около ΔAHC, а R_1 – радиус описанной около этого треугольника окружности. Тогда $2R_1 = \frac{AC}{\sin\angle H}$;

3)В четырёхугольнике HKBP ∠K = ∠P = 90°,
тогда ∠H + ∠PBK = 180°, ∠H = 180° - ∠PBK = 180° - α
$2R_1 = \frac{AC}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$, $R_1 = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.
Получили, что $R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = R_1$.



ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 1



D и E основания высот AD и CE ΔACB.
Доказать, что ΔABC ~ Δ DEB

Доказательство

1 способ: ∠ B – острый. Так как точки D и E – основания высот, то ΔACD и ΔACE - можно вписать в окружность с диаметром AC.
∠DAC = ∠DEC – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CD.
∠DCA = 90° - ∠DAC; ∠DEB = 90° - ∠DEC ⇒ **∠DCA = ∠DEB** и **∠BDE = ∠BAC** ⇒ ΔABC ~ Δ DEB по двум углам.

2 способ: ΔABE и Δ ADB - прямоугольные, $\cos\angle B = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$. Тогда по углу B и двум пропорциональным сторонам *ΔABC ~ Δ DEB*

1.4.1.Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

Решение:

Пусть R - радиус окружности, описанный около ΔABC. Тогда радиусы окружностей, описанных около ΔABC и ΔHBC равны между собой. По теореме синусов для ΔHBC имеем HC = 2R· sin ∠HBC или R = 2R· sin ∠HBC отсюда sin ∠HBC $= \frac{1}{2}$, а ∠HBC = 30° или ∠HBC = 150°.

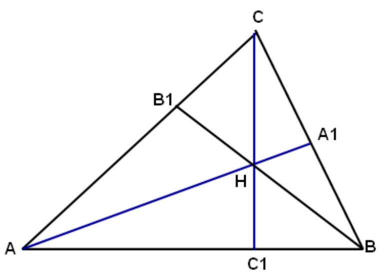


Рис. 1

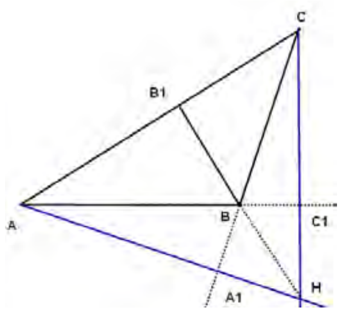


Рис. 2

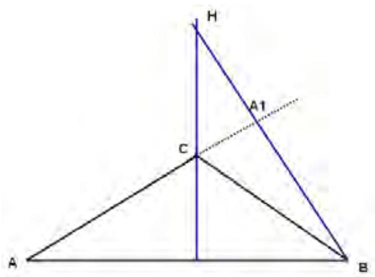


Рис. 3

1) ΔABC – остроугольный (Рис.1). ∠HBC = 30°, тогда ∠BCA = 60°, так $ΔBB_1C$ – прямоугольный.

2) ΔABC – тупоугольный (Рис.2), $\angle ABC$ – тупой или $\angle BAC$ – тупой, тогда $\angle HBC = 150°$, $\angle B_1BC = 30°$, $\angle BCA = 60°$.
3) $\angle ACB$ – тупой (Рис.3), $\angle HBC = 30°$, тогда $\angle BCA_1 = 60°$, а $\angle BCA = 120°$.
4) Если $\angle ABC = 90°$ или $\angle BAC = 90°$, то $\angle HBC = 30°$, тогда $\angle BCA = 60°$.
Ответ: 60°; 120°.

1.4.2. (2010) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что *CH* = *AB*. Найдите угол *ACB*.

Решение:
1) Пусть ΔABC – остроугольный (Рис. 1).
$\Delta AA_1B = \Delta HA_1C$ по гипотенузе (CH = AB) и острому углу ($\angle A_1AB = \angle HCA_1$), тогда $A_1B = HA_1$, то есть ΔHA_1B - равнобедренный прямоугольный,
$\angle A_1BB_1 = 45°$, тогда $\angle ACB = 45°$ (ΔBB_1C - прямоугольный.)

2) Если $\angle A$ или $\angle B$ – прямые, то точка H совпадает с вершиной A или B соответственно ΔABC, и при условии, что CH = AB, следует, что $\angle ACB = 45°$.

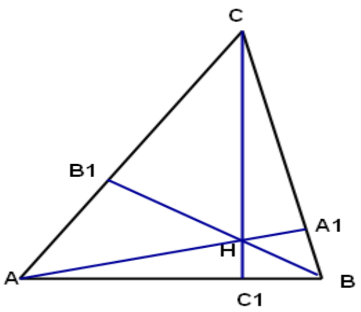


Рис.1

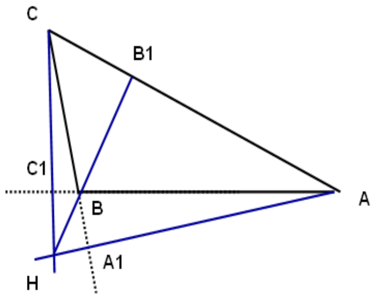


Рис. 2

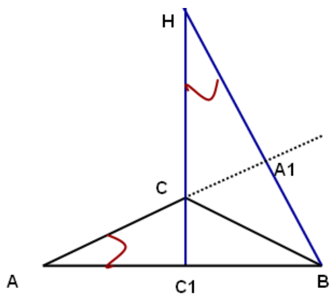


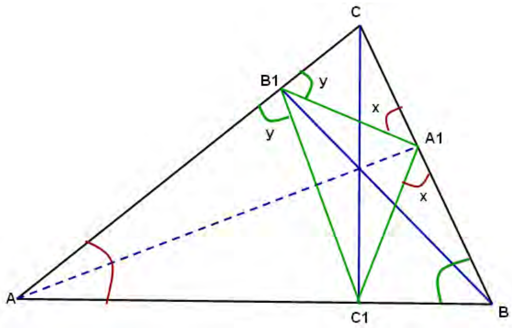
Рис. 3

3) Если $\angle A$ или $\angle B$ – тупые (Рис.1). CH = AB, ($\angle B_1BA = \angle CHB_1$, тогда $\Delta B_1BA = \Delta CHB_1$, следовательно $BB_1 = CB_1$, $\angle ACB = 45°$.

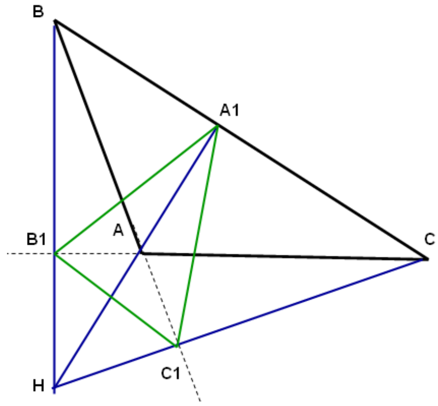
4) Если $\angle C$ - тупой (Рис.3). $\Delta AA_1B = \Delta HA_1C$ по гипотенузе (CH = AB) и острому углу ($\angle A_1AB = \angle HCA_1$), тогда $A_1B = HA_1$, то есть ΔHA_1B - равнобедренный прямоугольный, $\angle A_1BC = 45°$, тогда $\angle A_1CB = 45°$ (ΔBA_1C - прямоугольный.), тогда $\angle ACB = 180° - 45° = 135°$.
Ответ: 45° или 135°.

1.4.3. Точки A_1, B_1, и C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60°, 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольника, образованного основаниями высот).
Доказательство:
Пусть $\angle CAB = x$, тогда $\angle CA_1B_1 = \angle C_1A_1B = x \Rightarrow$
$\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1 = 90° - x$.
Тогда AA_1 – биссектриса $\angle A_1$ – ортотреугольника $A_1B_1C_1$.
Аналогично, если $\angle ABC = y$, то $\angle A_1B_1B = \angle BB_1C_1 = 90° - y$, то есть BB_1 – биссектриса $\angle B_1$ – ортотреугольника $A_1B_1C_1$.



Решение:
1)Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Пусть $\angle A_1 = 90°$, $\angle B_1 = 60°$, $\angle C_1 = 30°$.
$\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1 = 45°$, $x = 90° - 45° = 45°$, и $\angle A = 45°$;



Аналогично $\angle B = 60°$; $\angle C = 75°$;
При любом расположении значений углов A_1, B_1 и C_1 соответственные углы треугольника ABC равны 45°, 60° и 75° иначе
$90° \to 45°$, $60° \to 60°$, $30° \to 75°$
2) $\angle A$ – тупой, пусть $\angle A_1 = 90°$, тогда
$\angle C_1A_1C = \angle B_1A_1B = \angle BHC = 90° - 45° = 45°$, а
$\angle BAC = \angle B_1AC_1 = \angle A = 180° - 45° = 135°$; $\underline{\angle A = 135°}$;
Если $\angle B_1 = 60°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 30° = 60°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 60° = 30°$, тогда $\angle A = 15°$.
135°, 15°, 30°.
Если $\angle B_1 = 30°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 15° = 75°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 75° = 15°$, тогда $\angle C = 30°$.
135°, 15°, 30°.
3) пусть $\angle A_1 = 60°$ или $\angle A_1 = 30°$. Тогда
3.1. $\angle A_1 = 60°$, $\angle C_1A_1C = \angle B_1A_1B = \angle BHC = 90° - 30° = 60°$, а
$\angle BAC = \angle B_1AC_1 = \angle A = 180° - 60° = 120°$; $\underline{\angle A = 120°}$;
Если $\angle B_1 = 30°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 15° = 75°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 75° = 15°$, тогда $\angle C = 45°$. Получили **120°, 15°, 45°** или
Если $\angle B_1 = 90°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 45° = 45°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 45° = 45°$, тогда $\angle A = 45°$. Получили **120°, 15°, 45°.**
3.2. $\angle A_1 = 30°$, $\angle C_1A_1C = \angle B_1A_1B = \angle BHC = 90° - 15° = 75°$, а
$\angle BAC = \angle B_1AC_1 = \angle A = 180° - 75° = 105°$; $\underline{\angle A = 105°}$;
Если $\angle B_1 = 90°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 45° = 45°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 45° = 45°$, тогда $\angle C = 30°$. Получили **105°, 30°, 45°.**
Если $\angle B_1 = 60°$, то $\angle C_1B_1H = \angle BCC_1 = 90° - 30° = 60°$,
а $\angle ABC = \angle B = 90° - 60° = 30°$, тогда $\angle C = 45°$. Получили **105°, 30°, 45°.**

Ответ: 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30° или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°.

1.4.4. Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\dfrac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

Решение:

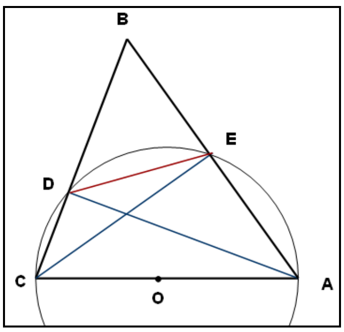


Рис. 1

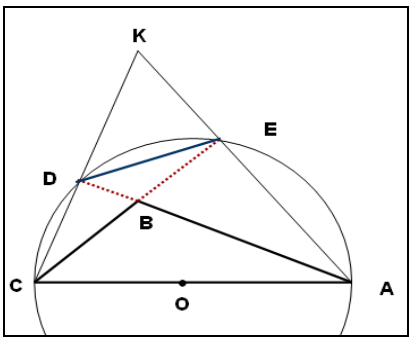


Рис. 2

1 случай: $\angle B$ – острый. Так как точки D и E – основания высот, то ΔACD и ΔACE - можно вписать в окружность с диаметром AC
$\angle DAC = \angle DEC$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CD. $\angle DCA = 90° - \angle DAC$; $\angle DEB = 90° - \angle DEC \Rightarrow$
$\angle DCA = \angle DEB \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEB$ по двум углам.
Тогда $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DE}{AC} = k$. Но в ΔADB отношение $\dfrac{DB}{AB} = \cos\angle B \Rightarrow \cos\angle B = k$. По теореме косинусов в ΔABC найдем AC:

AC = $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle B}$ $= \sqrt{a^2+b^2-2abk}$.

<u>*2 случай*</u>: ∠ B – тупой, тогда высота AD и CE пересекают продолжение сторон CB и AB. Аналогично cos∠K = *к*. ∠K + ∠CBE = 180°, тогда
cos∠CBE = - cos∠K = - k.
По теореме косинусов в ΔABC найдем AC:
AC = $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle B}$ =.$\sqrt{a^2+b^2+2abk}$.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$ или $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$

1.4.5. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен *α*, сторона *BC* равна *a*, *H* — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BHC*.

<u>*Решение*</u>:
<u>*1 случай*</u>: (Рис.1)
O – центр описанной около ΔBCH окружности, OK – серединный перпендикуляр к стороне BC, KC = 0,5 *a*, OC – радиус описанной окружности.

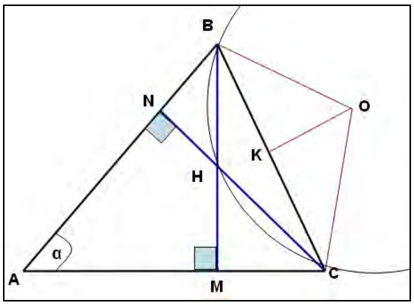


Рис. 1

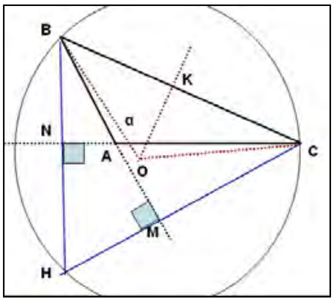


Рис. 2

Рассмотрим четырехугольник AMHN, ∠M = ∠N = 90° ⇒ ∠ MHN = ∠CHB = 180° - α, а соответствующая этому углу дуга равна 360° - 2α, дуга BHC равна 2α, тогда центральный угол ∠COB = 2α, а ∠COK = α.

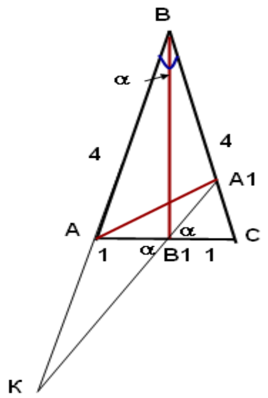
2) Из ΔKCO получим: sinα = $\dfrac{KC}{OC}$, OC = $\dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

<u>*2 случай*</u>: (Рис.2)
O – центр описанной около ΔBCH окружности, OK – серединный перпендикуляр к стороне BC, KC = 0,5 *a*, OC – радиус описанной окружности.
1) Рассмотрим четырехугольник AMHN, ∠M = ∠N = 90° ⇒ ∠ MHN = 180° - ∠ MAN =
= 180° - α, тогда ∠COB = 360° - 2α, а ∠COK = 180° - α, а ∠KCO = α - 90°

2) Из ΔKCO получим: cosα = $\dfrac{KC}{OC}$, OC = $\dfrac{KC}{cos(\alpha-90^\circ)} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

Ответ: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$

1.4.6. (Свойство высот, подобие треугольников) В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами AB = BC = 4 и AC = 2 проведены высоты AA1 и BB1. прямая A1B1 пересекает прямую AB в точке K. Найдите длину AK.
<u>*Решение:*</u>



1) Так как A_1 и B_1 – основания высот, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ по двум углам : $\angle C$ – общий, $\angle A_1B_1C = \angle ABC = \alpha$, тогда $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{BC}{B_1C}$, или

$\dfrac{4}{A_1B_1} = \dfrac{2}{A_1C} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow A_1B_1 = 1$, $A_1C = \dfrac{1}{2}$, тогда $BA_1 = 3{,}5$.

2) $\Delta KBA_1 \sim \Delta AB_1K$ по двум углам, $\angle K$ – общий, $\angle AB_1K = \angle ABC = \alpha$, Пусть $AK = x$, $KB_1 = y$, $KA_1 = y + 1$, тогда $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{KB_1}{BK} = \dfrac{AB_1}{BA_1}$ или

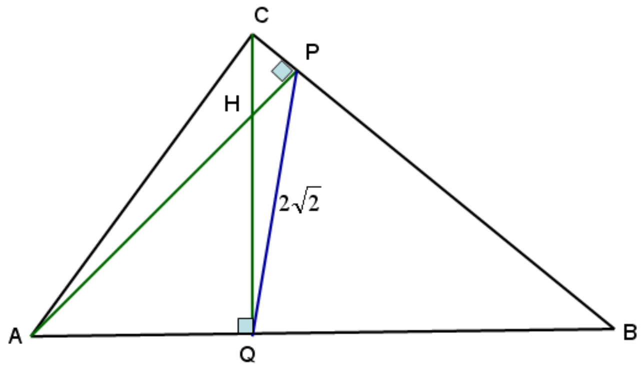
$\dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+4} = \dfrac{1}{3{,}5}$.

3) $3{,}5\, y = x + 4$; $3{,}5\, x = y + 1$; $y = 3{,}5x – 1$; $3{,}5\,(3{,}5x – 1) = x + 4$; $11{,}25\, x = 7{,}5$; $x = \dfrac{2}{3}$

Ответ: $\dfrac{2}{3}$

1.4.7. (Опорная задача, свойство высот) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение:



1) Так как P и Q – основания высот ΔABC, то точки A, C, P и Q лежат на одной окружности с центром на середине стороны AC. $\angle CAP = \angle CQP = \alpha$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CP, а $\angle ACP = \angle BQP = 90° - \alpha$, тогда $\Delta ABC \sim \Delta BQP$ по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия.

Найдем коэффициент подобия: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BPQ}} = \dfrac{18}{2} = 9, \Rightarrow$ к = 3, тогда $AC = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

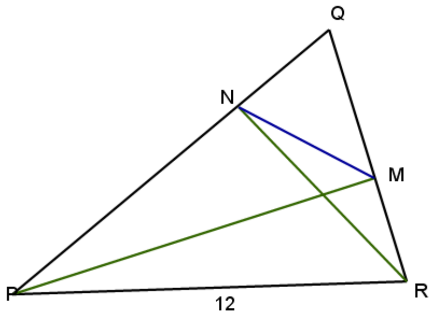
2) По теореме синусов: $\dfrac{AC}{\sin\angle B} = 2R$, $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin\angle B}$.

3) Из подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta BQP$ следует, что $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{1}{3}$, но из прямоугольного ΔAPB следует, что $\cos\angle B = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{1}{3}$, а $\sin\angle B = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогда $R = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 4{,}5$

Ответ: 4,5.

1.4.8. В остроугольном треугольнике PQR, сторона PR которого равна 12, на стороны QR и PQ опущены высоты PM и RN. Вычислить площадь четырехугольника PNMR, если известно, что площадь треугольника NQM равна 2, а радиус окружности, описанный около треугольника PQR равен $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Решение:



1) По теореме синусов $\dfrac{12}{\sin Q} = 2\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$,

$\sin Q = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. $\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$, $\cos Q = \dfrac{1}{3}$.

2) $\angle QNM = \angle QRP \Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta QMN$ по двум углам,

тогда $\dfrac{S_{QMN}}{S_{QPR}} = \left(\dfrac{QM}{QP}\right)^2 = \cos^2 Q = \dfrac{1}{9}$, тогда

$S_{QPR} = 2\cdot 9 = 18$, а $S_{PNMR} = 18 - 2 = 16$.
Ответ: 16.

1.4.9. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

Решение:

Так как *H_1 и H_2* основания высот ΔABC, то точки H_1, H_2, A и B – точки одной окружности, описанной около четырехугольника ABH_1H_2, а точка M – центр этой окружности. Тогда $AM = MB = MH_1 = MH_2 =$ – радиусу этой окружности. (Опорная задача № 1)

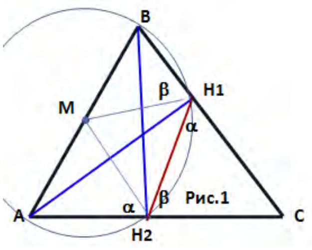
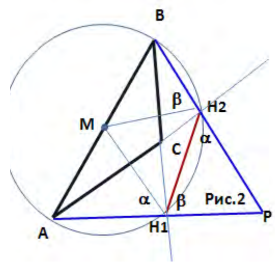


Рис. 1. Пусть $\angle H_2H_1C = \alpha$, тогда $\angle BAC = \alpha$, а так как $AM = MH_2$, то $\angle MH_2A = \alpha$, а $\angle MH_2H_1 = 180° - (\alpha + \beta)$; Но так как $\Delta\, H_2H_1M$ – равнобедренный прямоугольный, то $\angle MH_2H_1 = 45°$, Тогда $\alpha + \beta = 180° - 45° = 135°$, а $\angle C = 45°$.

Рис. 2. $\angle P = 45°$, а $\angle C = 180° - 45° = 135°$, так как в четырехугольнике CH_1PH_2 сумма углов равна 360°, а углы H_1 и H_2 – прямые.



Ответ: 45° или 135°.

1.4.10. AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC. Угол A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 36^0, а угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 84^0. Найдите угол C треугольника ABC.

Решение:

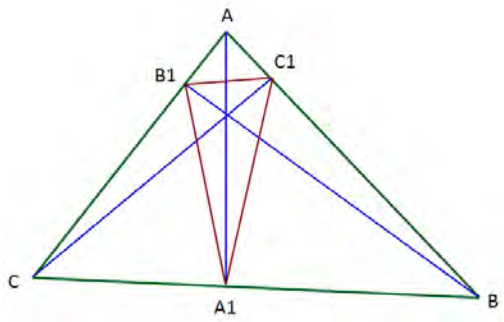


Рис.1

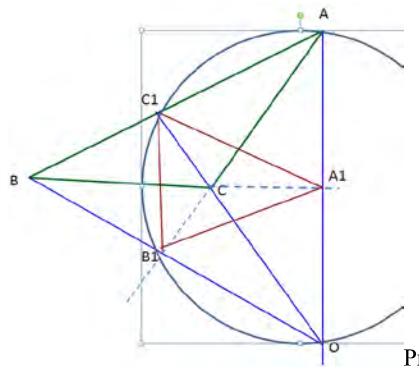


Рис.2

1) $\angle A_1 = 36^0$, $\angle B_1 = 84^0$, тогда $\angle C_1 = 180^0 - (36^0 + 84^0) = 60^0$.

2) ***Рис. 1***. ΔABC – остроугольный. Так как, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот),* то $\angle CC_1A_1 = \angle CC_1B_1 = 60^0 : 2 = 30^0$.

3) ΔCC_1B и ΔCB_1B – прямоугольные с общей гипотенузой CB, тогда они вписаны в одну окружность с диаметром CB, $\angle CC_1B_1 = \angle B_1BC = 30^0$, как углы опирающиеся на одну дугу CB_1. Из прямоугольного $\Delta\, B_1BC$ найдем $\angle B_1CB = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

4) ***Рис.2***. ΔABC – тупоугольный, $\angle C$ – тупой, O – точка пересечения высот. Рассмотрим ΔCAO, с высотами BA_1, AB_1 и OC_1. $\Delta\, A_1B_1C_1$ - *ортотреугольник.* Тогда $\angle OC_1B_1 = \angle OC_1A_1 = 60^0 : 2 = 30^0$.

5) ΔOC_1A и ΔOB_1A – прямоугольные с общей гипотенузой ОА, тогда они вписаны в одну окружность с диаметром ОА, $\angle OC_1B_1 = \angle B_1AO = 30^0$, как углы опирающиеся на одну дугу OB_1.
Из ΔB_1AO найдем $\angle B_1OA = 90^0 - 30^0 = 60^0$, тогда $\angle ACB = 120^0$
Ответ: 60^0 или 120^0**.**

1.4.11. (ТВ№28-2013, А. Ларин.) Найти длины сторон АВ и АС треугольника АВС, если ВС = 8, а длины высот, проведенных к АС и ВС, равны соответственно 6,4 и 4.
Решение:

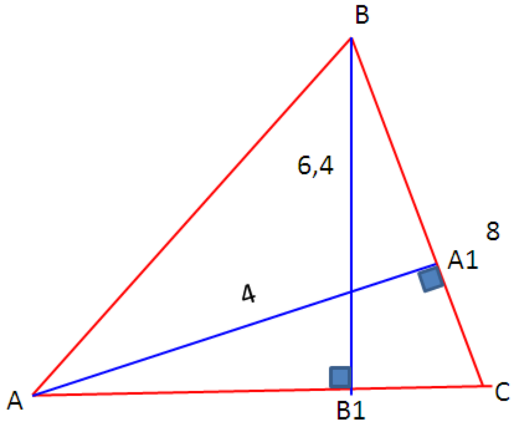


Рис.1

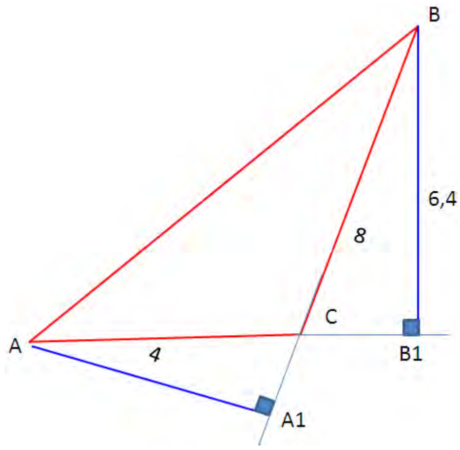


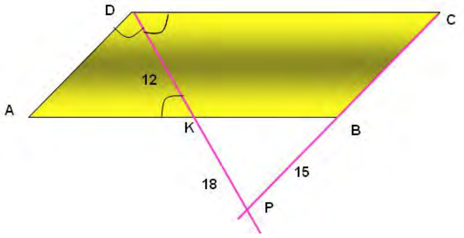
Рис. 2

1) $AC = \frac{BC \cdot AA_1}{BB_1} = \frac{8 \cdot 4}{6,4} = 5$; $A_1C = \sqrt{AC^2 - AA_1{}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Рис.1: $BA_1 = 8 - 3 = 5$; $AB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
Рис.2: $BA_1 = 8 + 3 = 11$; $AB = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$.
Ответ: 5 и $\sqrt{41}$; 5 и $\sqrt{137}$.

2.1. Параллелограмм

2.1.1. (Реальный экзамен) В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр параллелограмма, если DK = 12, PK = 18, BP = 15.

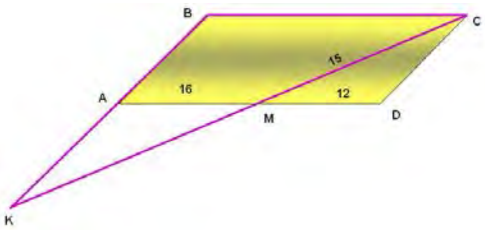
Решение



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства параллельных прямых;
2)признаки подобия треугольников;
3) понятие периметра;
4)свойства параллелограмма.

1) Так как DK – биссектриса, то $\angle$ ADK = $\angle$ KDC, а $\angle$ KDC = $\angle$ DKA – как накрест лежащие при BA || CD и секущей DK, $\angle$ AKD = $\angle$ PKB (вертикальные), $\angle$ ADK = $\angle$ BPK как накрест лежащие при BC || AD и секущей DP $\Rightarrow$ $\triangle$KDP – равнобедренный $\Rightarrow$ BP = KB = 15
2). $\triangle$ CMD ~ $\triangle$ KMA по двум углам $\Rightarrow$
AD: PB = AK : KB = DK : KP; AD: 15 = 12 : 18 $\Rightarrow$AD =10 $\Rightarrow$ AK = 10. Тогда AB = 10 + 10 = 20.
3) P_{ABCD} = AD + DC + BC + AB = 10 +20 + 10 + 20 = 60.
Ответ: 60.

2.1.2. В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M и прямую AB в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если DM = 12, CM = 15, AM = 16.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства параллельных прямых;
2)признаки подобия треугольников;
3) понятие периметра;
4) свойства параллелограмма.

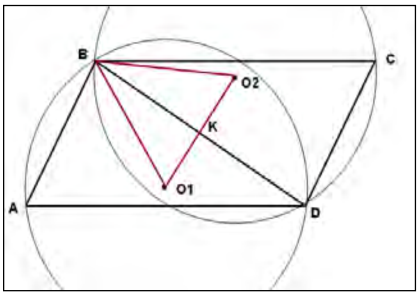
Решение:
1) BC = AD = DM + MA = 12 + 16 = 28.
2) Так как CM – биссектриса,
то $\angle$ MCD = $\angle$ BCM, а $\angle$ BCM = $\angle$ CMD – как накрест лежащие при BC || AD и секущей CM $\Rightarrow$
$\angle$ CMD = $\angle$ MCD $\Rightarrow$ CD = DM = 12 $\Rightarrow$ AB = 12.
3) $\angle$ MCD = $\angle$ BKC = $\angle$ BCM $\Rightarrow$ BC = KB = 28.
4) $\triangle$ CMD ~ $\triangle$ KMA $\Rightarrow$
MC: MK = MD : AM; 15 : MK =12 : 16;
MK =20.
5) P_{KBC} = BC + KB + KC = 28 +28 + 15 + 20 = 91.
Ответ: 91.

2.1.3. (2010) В параллелограмме *ABCD* известны стороны AB = *a*, BC = b и $\angle BAD = \alpha$ Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников *BCD* и *DAB*.

Решение:
1) По теореме косинусов

BD = $\sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAC}$ = = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\alpha}$ $\Rightarrow$

BK = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\alpha}$



2) $S_{ABD} = \frac{1}{2}$ AD·AB·sin a = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin a$.

С другой стороны площадь треугольника равна S_{ABD} = $\frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где a, b и c – стороны ΔABD, R – радиус описанной окружности. Тогда

R = $\frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{AD \cdot AD \cdot BD}{4S}$

R = $\dfrac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha}}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha}}{2\cdot\sin\alpha}$.

3) Из ΔBKO_1 по теореме Пифагора найдем KO_1: $KO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BK^2}$ =

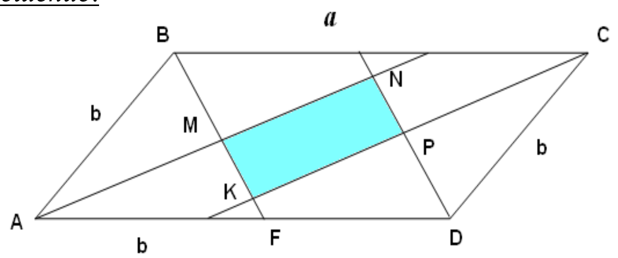
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{4\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}\left(a^2+b^2-2ab\cos\alpha\right)} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2ctg\alpha}.$$

$O_1O_2 = 2 \cdot KO_1 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2ctg\alpha} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{ctg\alpha}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha}}{ctg\alpha}$

2.1.4. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

Решение:



1) Так как AN и DN – биссектрисы углов A и D, $\angle A + \angle D = 180°$, то $\angle AND = 90°$.
Аналогично $\angle MKP = \angle KPN = \angle KMN = 90°$;
То есть MNPK – прямоугольник.
2) BF – биссектриса, тогда AB = A F = b.
3) Из ΔAND: ND = $a \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$;

AN = $a \cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

Из ΔCPD: CP = $b \cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$; CD = $b \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$;

4) MN = $a \cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} - b\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} = (a-b)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$; NP = $a\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2} - b\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2} = (a-b)\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

Тогда S_{MNPK} = $(a-b)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot(a-b)\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{(a-b)^2}{2}\cdot\sin\alpha$;

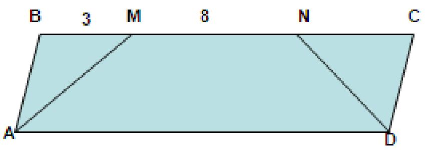
Ответ: $\dfrac{(a-b)^2}{2}\cdot\sin\alpha$.

2.1.5. Дан параллелограмм ABCD,   AB = 2,   BC = 3, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

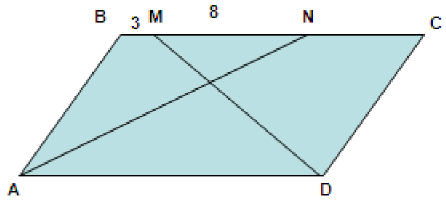
Ответ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$; $\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$.

2.1.6. В параллелограмме ABC биссектрисы углов при сторона AD делят сторону BC точками M и N так, что BM : MN = 3 : 8. Найдите BC, если AB = 5.

Решение:



<u>*1 случай*</u>: Пусть AM и ND – биссектрисы углов A и D параллелограмма.
1)Так как AB = 5, то BM = 5 (ΔABM – равнобедренный), аналогично CN = 5.
2) Пусть MN = x, тогда 3: 8 = 5 : x, x = 40 : 3,
$x = 13\frac{1}{3}$, или $BC = 10 + 13\frac{1}{3} = 23\frac{1}{3}$.



<u>*1 случай*</u>: Пусть AN и DM – биссектрисы углов A и D параллелограмма.
1)AB = BN = 5, DC = CM = 5;

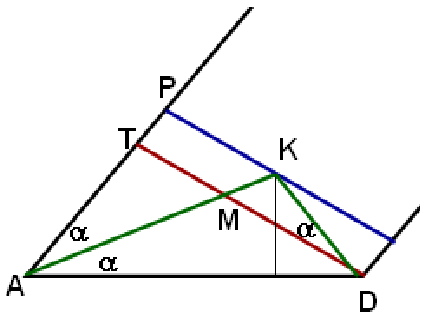
2)Пусть BM = x, тогда MN = 5- x, 3: 8 = x : (5 – x) , 15 – 3x = 8x, 11x = 15, $x = 1\frac{4}{11}$.

3) $BC = 5 + 1\frac{4}{11} = 6\frac{4}{11}$.

Ответ: $19\frac{1}{3}$; $6\frac{4}{11}$.

2.1.7. Внутри параллелограмма ABCD взята точка K, равноудаленная от прямых AD, AB, CD. Перпендикуляр, опущенный из вершины D на сторону AB, пересекает отрезок AK в точке M. Найдите площадь параллелограмма, если DK = 2 см,
AM : MK = 8 : 1, DC = 3 BC.

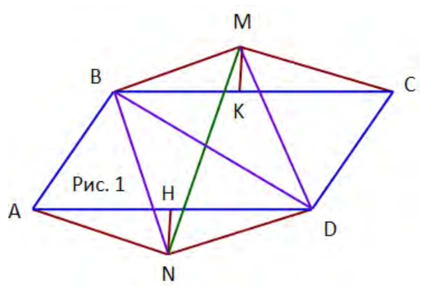
<u>*Решение:*</u>
1) Так как точка K равноудалена от прямых AD, AB, CD, то KD и AK – биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD, тогда $\angle AKD = 90°$. Если $\angle KAD = \alpha$, то $\angle TAM = \angle KDA = \alpha$, KD = 2.
2) Из ΔAKD получим $\sin\alpha = \frac{KD}{AD}$, $AD = \frac{2}{\sin\alpha}$, $AB = \frac{6}{\sin\alpha}$, тогда площадь параллелограмма
$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin 2\alpha = \frac{2}{\sin\alpha} \cdot \frac{6}{\sin\alpha} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 24\,\mathrm{ctg}\alpha$.



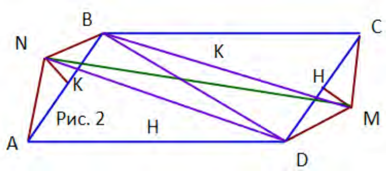
3)Так как AM : MK = 8 : 1, то MK = x, AM = 8x, AK = 9x
Из ΔAKD имеем $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{9x}{2}$, из ΔMKD имеем
$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2}{x}$, тогда $\frac{9x}{2} = \frac{2}{x}$, $x = \frac{2}{3}$, а $\mathrm{ctg}\alpha = 3$.
4) $S_{ABCD} = 24\,\mathrm{ctg}\alpha = 24 \cdot 3 = 72$.

Ответ: 72.

2.1.8. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60° . На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.



<u>*Решение*</u>: Так как равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине, построены на равных сторонах параллелограмма, то они равны по основанию и прилежащим углам.



Углы при основании треугольников равны: (180° - 120°): 2 = 30°. Так как $\angle ADB = \angle DBC$ (накрест лежащие), то $\angle MBD = \angle NDB$, $\Rightarrow$ отрезки BM и *N*D (Рис.1) и B*N и M*D (Рис. 2) – равны и параллельны, а четырехугольники MB*N*D - параллелограммы, а искомый отрезок M*N* – диагональ. Найдем диагонали параллелограмма ABCD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB \cdot AD\cdot \cos30°$; $BD = \sqrt{3}$.
Высоты построенных треугольников делят основания на равные отрезки, т.е точки K и H – середины сторон параллелограмма.

<u>Рис.1</u>: $BK = 2 :2 = 1$, $\cos30° = \frac{BK}{MB}$, $MB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\angle BCD = 60°$, $\angle BCM = 30° \Rightarrow \angle DCM = 90°$;

По теореме Пифагора $MD = \sqrt{DC^2 + MC^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$. По свойству параллелограмма NM

$= \sqrt{2\cdot MD^2 + 2\cdot BM^2 - BD^2}$; $NM = \sqrt{2\cdot\frac{7}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} - 3} = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

<u>Рис.2</u>: $BK = 1 :2 = 0{,}5$, $\cos30° = \frac{BK}{NB}$, $NB = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\angle BAD = 60°$, $\angle NAB = 30° \Rightarrow \angle DAN = 90°$;

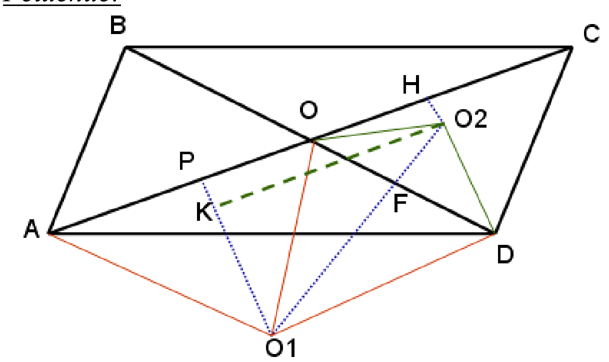
По теореме Пифагора $ND = \sqrt{DA^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}$. По свойству параллелограмма NM

$= \sqrt{2\cdot MD^2 + 2\cdot ND^2 - BD^2};$ $NM = \sqrt{2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{13}{3} - 3} = \sqrt{\frac{19}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$.

2.1.9. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма ABCD.

<u>Решение:</u>



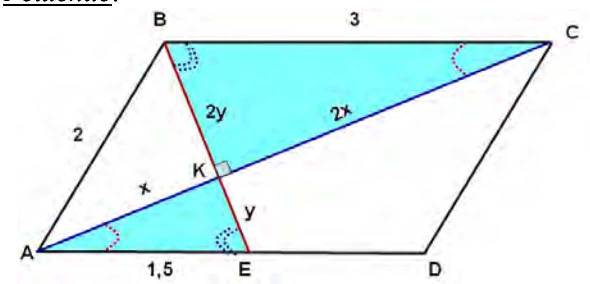
$S_{ABCD} = 0{,}5AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$, где $\angle AOB = \alpha$ или $S_{ABCD} = 0{,}5AC\cdot 12\cdot\sin\alpha = 6\cdot AC\cdot\sin\alpha$.
1) Так как $\Delta AOB = \Delta COD$, то радиусы описанных окружностей равны, то есть $R_2 = O_2O = 5$.
2) $OD = 12$, $\Rightarrow OF = FD = 3$, так как O_2F - серединный перпендикуляр. Тогда $O_2F = 4$, а $O_1F = 16 - 4 = 12$, а радиус $R_1 = O_1O = \sqrt{144+9} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$.
3) Пусть $OH = x$, тогда $HC = x$, $OP = PA = x$.
4) Рассмотрим трапецию HO_2O_1P, $O_2K \parallel HP$, $O_2K = 2x$, тогда из ΔO_1O_2K имеем: $\angle K O_1O_2 = \alpha$, $\sin\alpha = \frac{KO_2}{O_1O_2} = \frac{2x}{16}$, отсюда <u>$x = 8 \cdot \sin\alpha$</u>, тогда $S_{ABCD} = 6\cdot4x\cdot\sin\alpha = 24\cdot8\cdot\sin\alpha\cdot \sin\alpha = 192\cdot\sin^2\alpha$. $S_{ABCD} = 192\cdot\sin^2\alpha$.
5) Из ΔOCD, $CD^2 = 36 + 4x^2 - 24x\cos\alpha$, $CD = 10 \sin\alpha$, $x = 8 \cdot \sin\alpha$, составим уравнение:
$100 \sin^2\alpha = 36 + 4\cdot64\cdot \sin^2\alpha - 24\cdot8\cdot\sin\alpha\cdot \cos\alpha$, $100 \sin^2\alpha = 36 + 4\cdot64\cdot \sin^2\alpha - 24\cdot8\cdot\sin\alpha\cdot \cos\alpha$,
$25\sin^2\alpha = 9 + 64\cdot \sin^2\alpha - 48\cdot\sin\alpha\cdot \cos\alpha$; $16 \sin^2\alpha - 16\cdot\sin\alpha\cdot \cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$;
$16\mathrm{tg}^2\alpha - 16\mathrm{tg}\alpha + 3 = 0$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, а $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$,

6) $S_{ABCD} = 192\cdot\sin^2\alpha = 192\cdot\frac{9}{25} = \frac{1728}{25}$; $S_{ABCD} = 192\cdot\sin^2\alpha = 192\cdot\frac{1}{17} = \frac{192}{17}$

Ответ: $\frac{192}{17}$; $\frac{1728}{25}$.

2.1.10. Найти площадь параллелограмма ABCD со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$, если диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой стороны AD .

Решение:



1) $\Delta AKE \sim \Delta BKC$ по двум углам с $k = 2$. Тогда для прямоугольных треугольников АЕК и АКВ можно записать теорему Пифагора:
$x^2 + y^2 = 2{,}25$ и $x^2 + 4y^2 = 4$.

Отсюда $x = \sqrt{\dfrac{7}{12}}$, $y = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

2) $S_{тр} = 2S_{ABC} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BK = 3\cdot\sqrt{\dfrac{7}{12}}\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{5}{3}} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35}$.

Ответ: $\sqrt{35}$.

2.1.11. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

Решение:

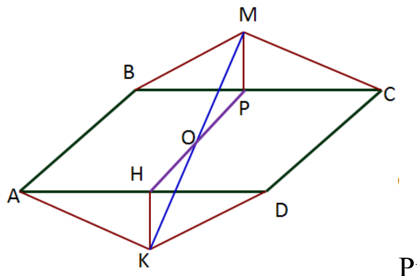


Рис.1

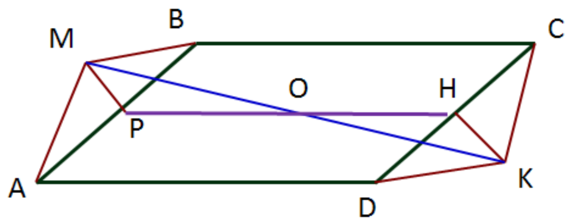


Рис.2

1 вариант: Рис.1. Треугольники построены на сторонах ВС =DA = 2.

1) Построенные треугольники ВМС и АКD с углами при основании равными 30°, равны по стороне и двум прилежащим к ним углам. Высоты МР = КН $= \frac{1}{2}$ ВС· tg30° $= \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) НР – соединяет середины сторон ВС и АD и НР // АВ, НР = АВ = 1; $\angle OHD = 60°$, тогда $\angle OHK = \angle OPM = 90° + 60° = 150°$; $\angle HOK = \angle MOP$ – вертикальные, тогда $\Delta OHK = \Delta MOP$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, тогда ОН = ОР = 0,5.

3) По теореме косинусов из ΔOHK найдем

$$OK = \sqrt{OH^2 + HK^2 - 2\cdot HO\cdot HK\cdot cos\angle OHK} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos(180° - 30°)}$$

$$OK = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{9} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{6},\quad KM = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

2 вариант: Рис.2. Треугольники построены на сторонах ВА =DC = 1.

1) Построенные треугольники ВМС и АКD с углами при основании равными 30°, равны по стороне и двум прилежащим к ним углам. Высоты МР = КН $= \frac{1}{2}$ ВС· tg30° $= \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) НР – соединяет середины сторон ВА и СD и НР // АD, НР = АD = 2; $\angle OHD = 60°$, тогда $\angle OHK = \angle OPM = 90° + 60° = 150°$; $\angle HOK = \angle MOP$ – вертикальные, тогда $\Delta OHK = \Delta MOP$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, тогда ОН = ОР = 1.

3) По теореме косинусов из ΔOHK найдем

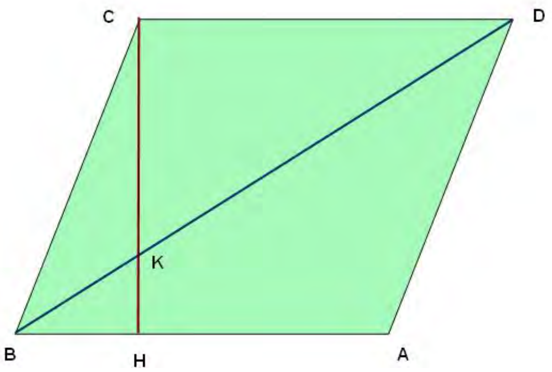
$$OK = \sqrt{OH^2 + HK^2 - 2\cdot HO\cdot HK\cdot cos\angle OHK} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos(180° - 30°)}$$

$$OK = \sqrt{1 + \frac{3}{9} + 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3},\quad KM = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{3}$ или $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

2.2. Ромб.
Прямоугольник. Квадрат.

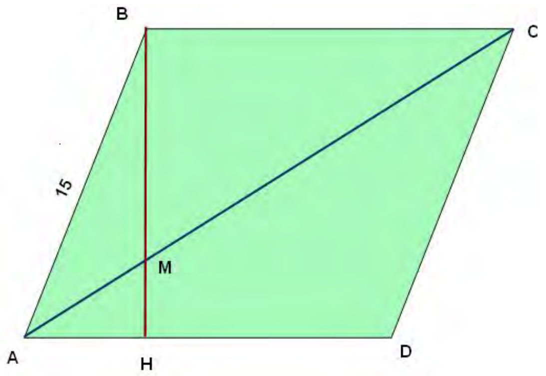
2.2.1. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. найдите длину отрезка CK.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) площадь ромба; 2) свойства биссектрисы;
3) свойства ромба; 4) теорема Пифагора.

Решение:
1. $S_{\text{ром.}} = BC^2 \cdot \sin B = 320$;
$BC^2 = 320 : \sin B = = 320 : 0{,}8 = 400$
$\Rightarrow BC = 20$.
2. $S_{\text{ром}} = AB \cdot CH = 320$
$\Rightarrow CH = 320 : AB = 320 : 20 = 16$.
3. Из Δ BCH
$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$
4. Диагональ BD – биссектриса угла B $\Rightarrow$
CK : BC = (16 – CK) : BH;
CK : 20 = (16 – CK) : 12;
12 CK = 320 – 20 CK; CK = 10.
Ответ: 10.

2.2.2. В ромбе ABCD из вершины тупого угла B проведена высота BH к стороне AD. Она пересекает диагональ AC в точке M. Сторона ромба равна 15, а его площадь равна 135. Найдите площадь треугольника AMH.



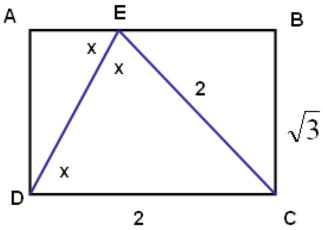
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:
1) площадь ромба; 2) свойства биссектрисы;
3) свойства ромба; 4) теорема Пифагора.
5) площадь прямоугольного треугольника.

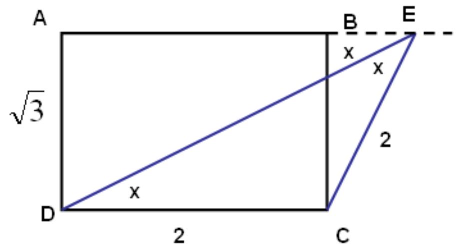
Решение:
1. $S_{\text{ром}} = AB \cdot BH = 135 \Rightarrow$
$BH = 135 : AB = 135 : 15 = 9$.
2. Из Δ BAH $AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$
3. Диагональ AC – биссектриса угла A $\Rightarrow$ MH : AH = (9 – HM) : BA;
MH : 12 = (9 – HM) : 15;
15 MH = 108 – 12 MH; 27 MH = 108,
MH = 4
4. $S_{\text{AMH.}} = 0{,}5 \cdot AH \cdot HM = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24

2.2.3. (2010) В прямоугольнике *ABCD* $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка *E* на прямой *AB* выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите *AE*.

Решение:
1. E – лежит между точками A и B. Тогда BE = 1, AE = 1.
2. B – лежит между точками A и E. Тогда BE = 1, AE = 1 + 2 = 3.
3. Если A – лежит между точками B и E, то $\angle$DEC является частью $\angle$AED, то есть не выполняется условие задачи $\angle AED = \angle DEC$.





Ответ: 1; 3.

2.2.4. (2010) Через середину стороны *AB* квадрата *ABCD* проведена прямая, пересекающая прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* соответственно и образующая с прямой *AB* угол *α*, *tg* α =3. Найдите площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна 4.

Решение:

1 случай (Рис 1):

Площадь искомого ΔBMT равна разности площади треугольника ABT и суммы площадей трапеции ABMD и треугольника MDT.

1)ΔABT = 0,5·AB·AT ; Из ΔAET найдем AT: AE = 2, tgα = AT : AE ; AT = 2·3 = 6.

Тогда ΔABT = 0,5·4·6 = 12.

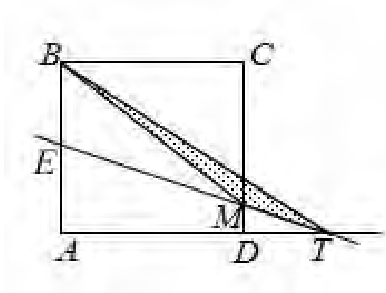


Рис. 1

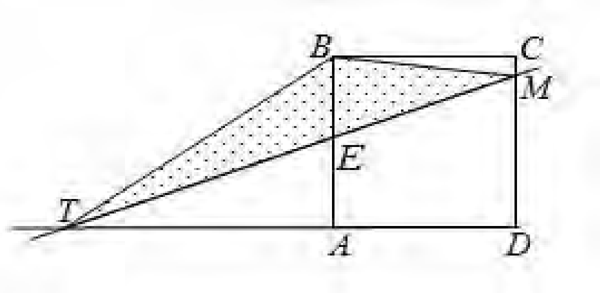


Рис. 2

2) Из Δ MDT найдем MD: ∠ DMT = α, тогда DM = DT : tgα = (6 – 4) : 3 = 2/ 3.

S_{ABMT} = 0,5(AB + MD) ·AD = 0,5· (4 + 2/ 3) · 4 = 8 + 4/3.

S_{MDT} = 0,5 ·2· 2/3 = 2/3.

3) S_{BMT} = 12 – (8 + 4/3 + 2/3) = 12 – 10 = 2.

2 случай (Рис. 2)

Площадь искомого ΔBMT равна разности площади трапеции BCDT и суммы площадей треугольников TMD и треугольника MCB.

1) AE = 2, tgα = AT : AE, AT = AE · tgα = 2·3 = 6; <u>AT = 6</u>. <u>TD</u> = 6 + 4 = <u>10;</u>

tgα = TD : CD, CD = TD : tgα = 10 : 3 = 10/3. <u>CD = 10/3, CM = 2/3</u>.

2) S_{TMD} = 0,5 · TD · CD = 0,5 · 10 · 10/3 = 50/3; S_{BCM} = 0,5 · BC · CM = 0,5 · 4 · 2/3 = 4/3.

S_{TBCD} = 0,5(BC + DT) · CD = 0,5 · 14 · 4 = 28.

3) S_{BMT} = 28 – (50/3 + 4/3) = 28 – 18 = 10.

Ответ: 10; 2.

2.2.5. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

Решение:

1) Так как ромбы равны и получены один из другого поворотом на 90° вокруг его центра, то OM = OC = 1,5, OB = ON = 1 ⇒ BM = NC = 0,5.

∠PMB = ∠PCT, ∠PBM = ∠PNC ⇒ ΔMPB =ΔPNC,

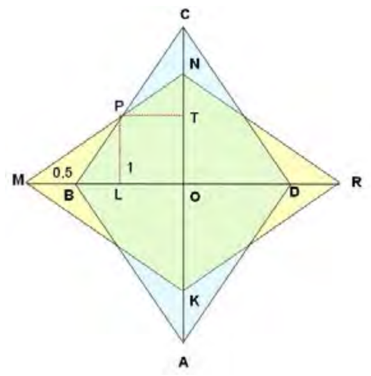
Тогда ΔMPL =ΔPTC, то есть PL = PT, OTPL – квадрат.

2) Пусть OT = x, тогда TN = 1 – x, CT = 1,5 - x.

$S_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$;

$S_{BCO} = S_{BPL} + S_{OLPT} + S_{TPC} = \frac{1}{2} \cdot (1 - x) \cdot x + x^2 + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1{,}5 - x) = \frac{5}{4}$

x Получили $\frac{5}{4}x = \frac{3}{4}$. $x = \frac{3}{5}$.



3)$S_{BONP} = 2 \cdot S_{BPL} + S_{OLPT} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{3}{5}) \cdot \frac{3}{5} + (\frac{3}{5})^2 = \frac{3}{5} - (\frac{3}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2$

$= \frac{3}{5}$.

4)Так как площадь S искомой фигуры, в 4 раза больше S_{BONP}, то $S = 4S_{BONP} = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$.

Ответ: $\frac{12}{5}$.

2.2.6. (2010) Сторона *AD* прямоугольника *ABCD* в три раза больше стороны *AB*; точки *M* и *N* делят *AD* на три равные части. Найдите sin(∠AMB +∠ANB + ∠ADB).

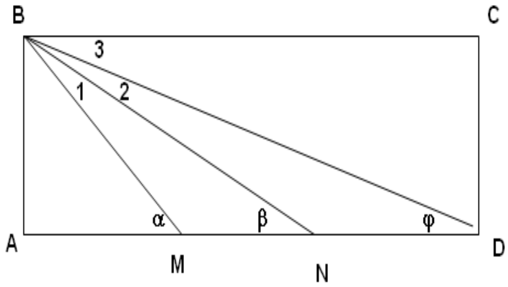


Рис. 1

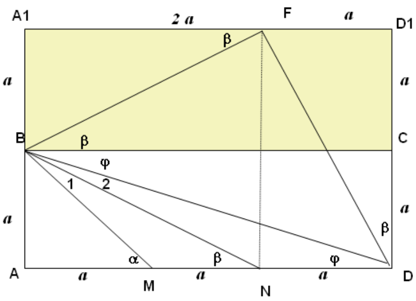


Рис. 2

1 способ. (Рис. 1)

Решение: 1) AB = AM = MN = ND = ***a***, тогда ΔABM – равнобедренный прямоугольный, тогда угол α = 45° и ∠1 + ∠2 + ∠3 = 45°.

2) ∠AMB + ∠ANB +∠ ADB = α + β + φ = ∠1 + ∠2 + ∠ 3 + ∠2 + ∠ 3 + ∠ 3 =
45° + ∠2 + ∠ 3 + ∠ 3;

3) Рассмотрим ΔBMN: MN = ***a***, BM = $a\sqrt{2}$. Тогда по теореме синусов $\frac{MN}{\sin\angle 1} = \frac{MB}{\sin\beta}$ или

$\frac{a}{\sin\angle 1} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin\beta}$; $\sin\angle 1 = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$.

3) Из ΔABN имеем: $BN = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$; $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а $\sin\angle 1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4) Из ΔCBD имеем: $BD = a\sqrt{10}$ $\sin\angle 3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ⇒ ∠ 1 = ∠ 3 , а ∠2 + ∠ 3 + ∠ 3 = ∠2 + ∠ 3 + ∠ 1 = 45°, тогда ∠AMB + ∠ANB +∠ ADB = 45° + 45° = 90°, <u>sin90° = 1</u>

Ответ:1.

2 способ.

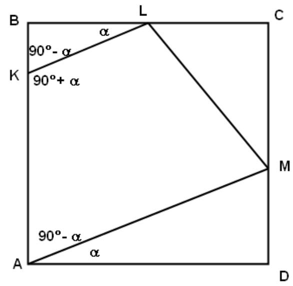
tgβ = $\frac{1}{2}$; tgφ = $\frac{1}{3}$; tg(β +φ) = $\frac{tg\beta + tg\varphi}{1 - tg\beta \cdot tg\varphi} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow$ β +φ = 45°, тогда

sin(∠AMB + ∠ANB +∠ ADB) = sin(α + β + φ) = sin 90° = 1.
Ответ: 1.

3 способ (Рис. 2)
Достроить прямоугольник BDTC – равный данному и точку на стороне DT симметричную точке M относительно BC.
1) α = 45°, так как ΔBAM – равнобедренный прямоугольный с катетами AM = AB = *a*.
2) BF = FD, так как треугольники BA_1F и FD_1D имеют равные катеты, тогда ∠FDB = β + φ , тогда ∠ADC =2 (β + φ) = 90°, а β + φ = 45°.
3) sin(∠AMB + ∠ANB +∠ ADB)= sin(α + β + φ) = sin (45°+45°) = sin 90° = 1.
Ответ: 1.

2.2.7. Дан квадрат ABCD. На стороне AB лежит точка К, на стороне BC - точка L, на стороне CD – точка M. Четырехугольник AKLM – равнобедренная трапеция. Найти сумму оснований трапеции, если AK = 5 и MD = 2.

Решение:



1) Пусть ∠MAD равен α, тогда ∠KAM = ∠BКL = 90°- α, а ∠BLК = α. Тогда ΔADM ~ ΔBKL по двум углам.
2)Пусть сторона квадрата AB = x, а BL= y, тогда BК = x – 5, CM = x – 2, CL = x – y. Из подобия треугольников следует, что MD : КB = AD : BL или
2 : (x – 5) = x : y, отсюда <u>*y = 0,5x (x – 5)*</u>; Из прямоугольного треугольника LCM имеем: $ML^2 = CM^2 + CL^2$ или
$25 = (x-2)^2 + (x-y)^2$, $25 - (x-2)^2 - (x - 0{,}5x\,(x-5))^2 = 0$;
$(7-x)(x^3 - 7x^2 + 4x + 12) = 0$, <u>*x = 7*</u>, $(x+1)(x^2 - 8x + 12) = 0$, x = -1, <u>*x = 6*</u>, x = - 2.
При <u>*x = 7*</u> , y = 7, не удовлетворяет условию задачи, при <u>*x = 6,*</u> y = 3.
3) AM = $\sqrt{AD^2 + DM^2} = 2\sqrt{10}$, KL = $\sqrt{KB^2 + BL^2} = \sqrt{10}$, тогда AM + KL = $3\sqrt{10}$
Ответ: $3\sqrt{10}$

2.2.8. (см. 2.2.4.)Прямая, проведённая через середину *N* стороны *AB* квадрата *ABCD* ,пересекает прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* соответственно и образует с прямой *AB* угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна8.
Ответ:16 или 48.

2.2.9. (см. 2.2.4.)Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата ABCD, пересекает прямые CD и AD в точках M T и соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата ABCD равна 8.
Ответ: 12 или 20.

2.2.10. (ТВ№10 2012 от А.Л.)Точка К делит диагональ AC квадрата ABCD в отношении 1:3. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.

Решение:

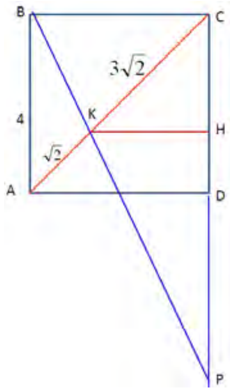


Рис. 1

Рис.1: 1)$\Delta ABK \sim \Delta CPK \quad \Rightarrow$
$\frac{AB}{CP} = \frac{AK}{CK}$; $\frac{4}{CP} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$; $\quad CP = 12.$
2) $KH = CK \cdot \sin 45° = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3;$
$S_{CPK} = \frac{CP \cdot KH}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18.$
Рис.2: 1)$\Delta ABK \sim \Delta CPK \quad \Rightarrow$
$\frac{AB}{CP} = \frac{AK}{CK}$; $\frac{4}{CP} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\quad CP = \frac{4}{3}.$
2) $KH = CK \cdot \sin 45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$
$S_{CPK} = \frac{CP \cdot KH}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 1}{2} = \frac{2}{3}$
Ответ: 18; $\frac{2}{3}$.

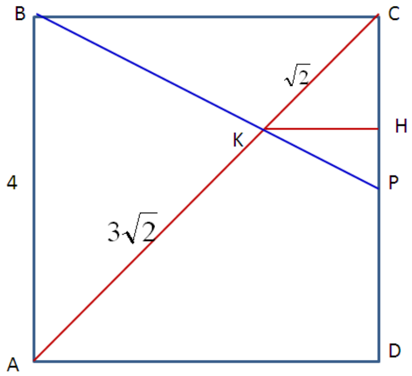


Рис.2

2.2.11. (ТВ№32-2013, А. Л.) В ромбе ABCD со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

Решение:

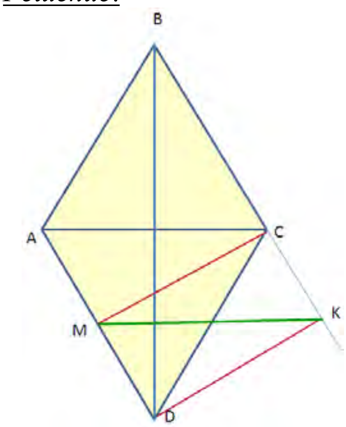


Рис.1

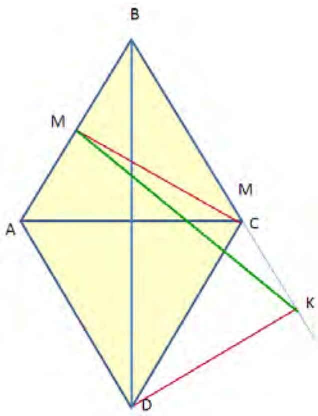


Рис. 2

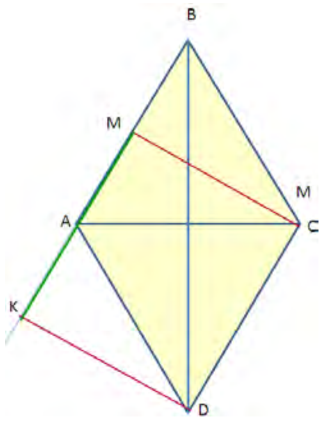


Рис.3

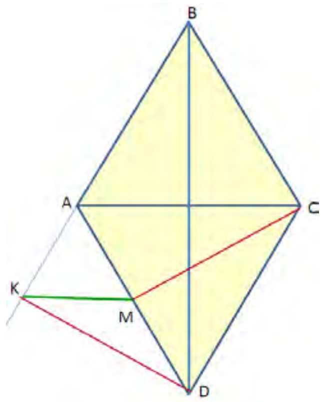


Рис. 4

Возможны 4 варианта:

Рис.1: MCKD – прямоугольник. $MC = \sqrt{3}$; $MD = 1$; $MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2.$

Рис.2: $MC = \sqrt{3}$; $CK = 1$; $\angle MCK = 180° - 30°$; $MK = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}.$

Рис.3: MCDK – прямоугольник, $MK = DC = 2.$

Рис.4: $AK = AM = 1$; $\angle MAK = 60° \Rightarrow \Delta AMK$ – равносторонний, $KM = 1.$

Ответ: 1; 2; $\sqrt{7}$.

2.2.12. На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *CPD* . Найдите высоту треугольника *ABP* , проведённую из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Решение:

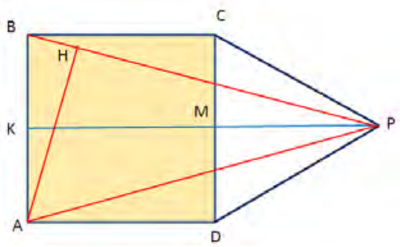


Рис. 1

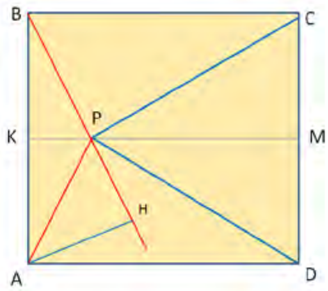


Рис. 2

1 способ:

1) ΔCPD – равносторонний, MP = PD · sin60° = $1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

KP = $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (Рис.1); KP $= \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (Рис. 2)

Рис.1: $S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$; Рис. 2; $S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

2) Рис.1: $BP = \sqrt{BK^2 + KP^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$; $AH = \frac{2S}{BP} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Рис.2. : $BP = \sqrt{BK^2 + KP^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$; $AH = \frac{2S}{BP} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 способ:

ΔBCP – равнобедренный, BC = CP $\Rightarrow$

Рис.1: $\angle CBP$ = (180° - (90° + 60°)): 2 = 15°, тогда $\angle PBK$ = 90° - 15° = 75°.

AH = 1 · sin75°= sin30°·cos45° + cos30° sin45° = $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Рис.2: $\angle CBP$ = (180° - (90° - 60°)): 2 = 75°, тогда $\angle PBK$ = 90° - 75° = 15°.

AH = 1 · sin15°= sin45°·cos30° - cos45° sin30° = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2.2.13. На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равнобедренный прямоугольный треугольник *CPD* с гипотенузой *CD*. Найдите высоту треугольника *ABP* , проведённую из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

2.2.14. На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *CPD* . Найдите высоту треугольника *ADP* , проведённую из вершины *D*, если известно, что сторона квадрата равна 1

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2.3. Трапеция, четырехугольник

1. *Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.*

2. *Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.*

3. *Средняя линия трапеции делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам.*

4. *Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади (Рис.25).*

$$\Delta AOD \sim \Delta BOC \quad \text{и} \quad S_{AOB} = S_{DOC}$$

5. *В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон.*

6. *Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам (Рис. 26).*

7. *Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции:*

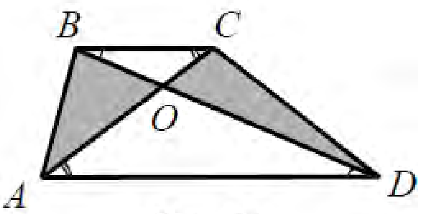


Рис. 25

$$MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

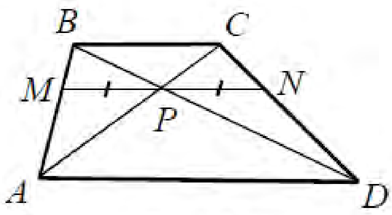


Рис. 26

8. *Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.*

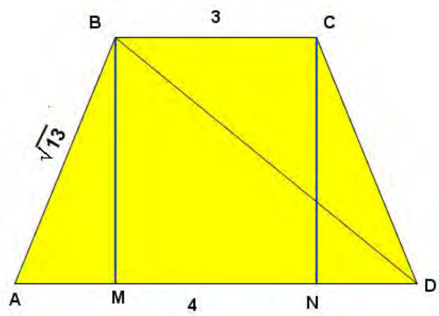
9. *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).*

Опорные задачи

- *Доказать, что угол между биссектрисами смежных угол прямой.*
- *Доказать, что угол между биссектрисами углов, прилежащих одной стороне параллелограмма прямой.*
- *Доказать, что угол между биссектрисами углов, прилежащих боковой стороне трапеции прямой.*
- *Доказать, что каждая точка биссектрисы неразвернутого угла, равноудалена от его сторон (свойство биссектрисы).*

2.3.1. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

Решение:



MN = 3. тогда AM = 0,5. Из $\triangle$ ABM:

$$MB = \sqrt{\sqrt{13}^2 - 0,5^2} = \sqrt{13 - 0,25} = \sqrt{12,75}$$

MD = 3, 5 тогда

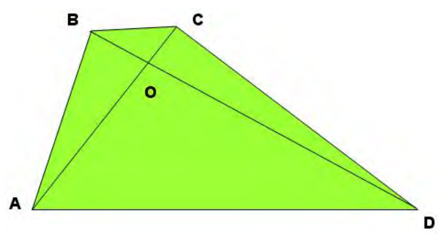
$$BD = \sqrt{12,75 + 3,5^2} = \sqrt{12,75 + 12,25} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1)свойства равнобедренной трапеции; 2) теорема Пифагора;

2.3.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = 3OC$. Площадь треугольника AOD равна 36. Найдите площадь трапеции.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Решение:

$S_{тр} = 0,5\,(AD + BC)\,h.$

$\triangle AOD \sim \triangle BOC$, $k = 3, \Rightarrow S_{AOD} : S_{OBC} = 9$,

$S_{OBC} = 36 : 9 = 4.$

$S_{OBC} = 0,5 \cdot OC \cdot h_1$; $S_{OBA} = 0,5 \cdot OA \cdot h_1$;

$S_{OBA} = 3 \cdot S_{OBC} = 3 \cdot 4 = 12.$

$S_{OCD} = S_{OBA} = 12.$

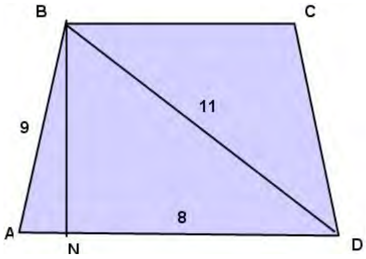
$S_{тр} = S_{AOD} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OBA} = 36 + 12 + 12 + 4 = 64.$

1)Подобные треугольники: свойства и признаки;
2) Отношение площадей подобных треугольников.

Ответ: 64.

2.3.3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. Найдите меньшее основание трапеции.

Решение:



$$S_{ABD} = \sqrt{14 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = 6\sqrt{35}$$

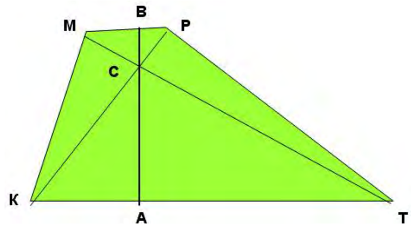
$S_{ABD} = 4 \cdot BN = 6\sqrt{35} \Rightarrow BN = 1{,}5\sqrt{35}$;

$AN = \sqrt{81 - (1{,}5\sqrt{35})^2} = 1{,}5$; $BC = 8 - 1{,}5 \cdot 2 = 5$.

Ответ: 5

2.3.4. В трапеции KMPT с основаниями MP и KT диагонали пересекаются в точке C. Площадь треугольника MCP равна 4, KT = 2 MP. Найти площадь трапеции.

Решение:



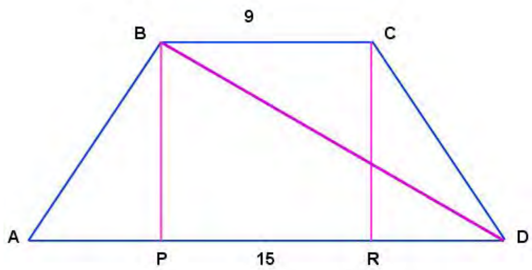
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия; 2) решение пропорций;
3) формулы площадей треугольника, трапеции;
4) значение тригонометрических функций некоторых углов.

$\triangle KCT \sim \triangle MCP$ по двум углам $\Rightarrow$
$KT : MP = AC : CB = 2$. $S_{MCP} = 0{,}5 \cdot MP \cdot CB = 4 \Rightarrow CB = 8 : MP$.
$AC = 2\,CB = 16 : MP$.
$S_{трап} = 0{,}5\,(KT + MP) \cdot AB = 0{,}5 \cdot 3\,MP \cdot 3CB =$
$0{,}5 \cdot 9\,MP \cdot 8 : MP = 36$

Ответ: 36.

2.3.5. В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найти площадь трапеции.

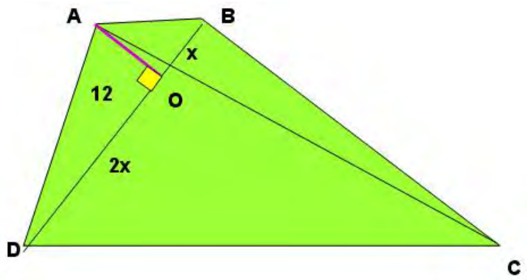
Решение:



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия; 2) решение пропорций;
3) теорема Пифагора; 4) площадь трапеции

Так как трапеция равнобедренная, то $PR = CD = 9 \Rightarrow AP = (15 - 9) : 2 = 3$
$\triangle ABP \sim \triangle ABD$ по углам:
$\angle APB = \angle ABD$ - прямые, $\angle A$ – общий $\Rightarrow$
$AB : AD = AP : AB \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AP$,
$\Rightarrow AB^2 = 15 \cdot 3 = 45 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$;
$\Rightarrow BP = \sqrt{45 - 9} = \sqrt{36} = 6$
$S_{тр} = 0{,}5 \cdot (15 + 9) \cdot 6 = 24 \cdot 3 = 72$
Ответ: 72

2.3.6. Диагонали трапеции ABCD (AB || CD) пересекаются в точке O. Площадь треугольника ADO равна 12, DO = 2 BO. Найти площадь трапеции.



Решение:

$S_{AOD} = 0{,}5 \cdot 2x \cdot AO = 12$;

$S_{AOB} = 0{,}5 \cdot x \cdot AO = 12 : 2 = 6$

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$, по углам, $k = 2$:

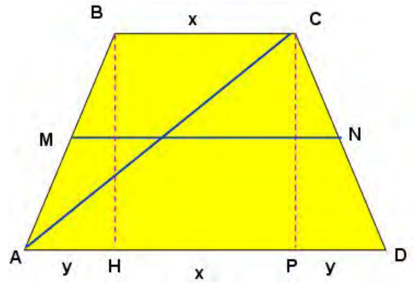
$\Rightarrow S_{DOC} : S_{AOB} = k^2 = 4 \Rightarrow S_{DOC} = 6 \cdot 4 = 24$;

$S_{BOC} = S_{AOD} = 12 \Rightarrow S_{тр.} = S_{AOD} + S_{AOB} + S_{DOC} + S_{BOC} = 12 + 12 + 6 + 24 = 54$

Ответ: 54.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) признаки подобия;
2свойства площадей подобных треугольников;

2.3.7. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её средняя линия равна 4, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



Решение:

1. Так как трапеция равнобедренная, то BC = HP = x.
AH = PD = y, тогда 2x + 2y = 2 MN $\Rightarrow$ x + y = 4, то есть AP = 4.

2. $\cos \angle CAD = AP : AC = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. $AC = 2\sqrt{5}$.

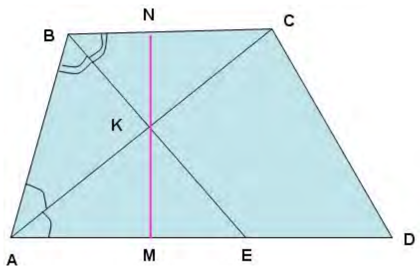
По теореме Пифагора найдем CP: $CP = \sqrt{20 - 16} = 2$.

3. $S_{тр.} = 0{,}5 \cdot MN \cdot CP = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1)свойства равнобедренной трапеции;
2) соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника;
3) площадь трапеции.

2.3.8. В трапеции ABCD диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 18\sqrt{10}$, $BE = 6\sqrt{10}$.



Решение:

$\angle KAE = \angle BCK$ – накрест лежащие $\Rightarrow$

$\angle BAK = \angle BCK \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный,

CB = BA. Биссектриса BK – медиана и высота

$\Rightarrow AK = KC = 9\sqrt{10}$ и $\angle AKB = 90°$.

$\angle KBC = \angle KEA$ – накрест лежащие $\Rightarrow$

$\angle ABK = \angle AEK \Rightarrow$

ΔABE – равнобедренный, AB = EA. Биссектриса AK – медиана и высота $\Rightarrow$

$BK = KE = 3\sqrt{10}$ и $\angle AKB = 90°$.

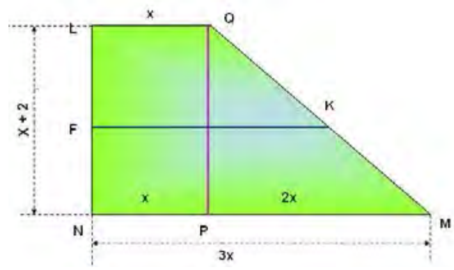
Из $\triangle AKB$ найдем AB: $AB = \sqrt{81 \cdot 10 + 9 \cdot 10} = 30$. Тогда CB = AB = AE = 30

$S_{AKC} = S_{BKC} = 0{,}5\ AE \cdot MK = 0{,}5\ AK \cdot KE \Rightarrow MK = (AK \cdot KE) : AE = 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} : 30 = 9$

$\Rightarrow MN = 9$

Ответ: 9

2.3.9. В выпуклом четырехугольнике MNLQ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс угла при вершине M равен $\dfrac{2}{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон NL и MQ, если известно, что сторона LQ втрое меньше стороны MN и на 2 меньше стороны NL.



Решение:

1) Так как $\angle LNM = \angle NLQ = 90°$, то прямые NM и LQ параллельны по признаку параллельности прямых. Тогда MNLQ – прямоугольная трапеция.

2) Пуст LQ = x, тогда NM = 3x, LN = x + 2, PN = x, а PM = 2x.

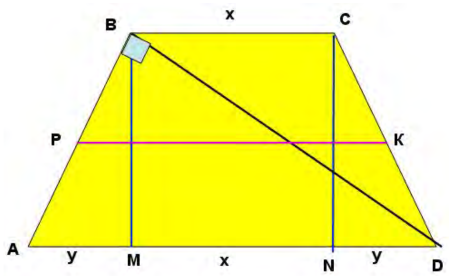
3) из $\triangle$ MQP имеем: $tg\ M = \dfrac{QP}{PM} = \dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{2}{3}$;

3x + 6 = 4x, x = 6.

4) FK = 0,5(LQ + NM) = 2 x = 2 · 6 = 12

Ответ: 12.

2.3.10. Высота равнобедренной трапеции равна 12; её средняя линия равна 16. Найти периметр трапеции, если известно, что её диагональ перпендикулярна боковой стороне.



Решение:

1) 2x + 2y = 2 PK ⇒ x + y = PK = 16.

2) $\triangle$ BMD ~ $\triangle$ AMD по углам ⇒

MD : BM = BM : AM, 16 : 12 = 12 : y ⇒ y = 9.

3) по теореме Пифагора

$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$.

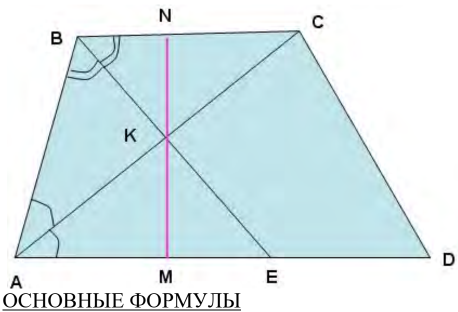
4) P = 2AB + 2(x + y) = 30 + 32 = 62.

Ответ: 62.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1) признаки подобия прямоугольных треугольников; 2) свойства средней линии трапеции;

2.3.11. (ДВ) В трапеции *ABCD* диагональ *AC* является биссектрисой угла *A*. Биссектриса угла *B* пересекает большее основание *AD* в точке *E*. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1Свойства биссектрисы;

2) накрест лежащие углы при параллельных прямых;

3) свойства равнобедренного треугольника;

4) формулы площадей прямоугольного треугольника.

Решение:

$\angle KAE = \angle BCK$ – накрест лежащие ⇒ $\angle BAK = \angle BCK$ ⇒ $\triangle$ ABC – равнобедренный, CB = BA. Биссектриса BK – медиана и высота ⇒

$AK = KC = 4\sqrt{5}$ и $\angle AKB = 90°$.

$\angle KBC = \angle KEA$ – накрест лежащие ⇒ $\angle ABK = \angle AEK$ ⇒ $\triangle$ ABE – равнобедренный, AB = EA. Биссектриса AK – медиана и высота ⇒

$BK = KE = 2\sqrt{5}$ и $\angle AKB = 90°$.

Из $\triangle$AKB найдем AB: $AB = \sqrt{16 \cdot 5 + 4 \cdot 5} = 10$

Тогда CB = AB = AE = 10.

$S_{AKC} = S_{BKC} = 0{,}5\ AE \cdot MK = 0{,}5\ AK \cdot KE$ ⇒

$MK = (AK \cdot KE):AE = 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} : 10 = 4$ ⇒ MN = 8.

Ответ: 8.

2.3.12. (2010) Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *E*. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника *AED* равна 9, а точка *E* делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

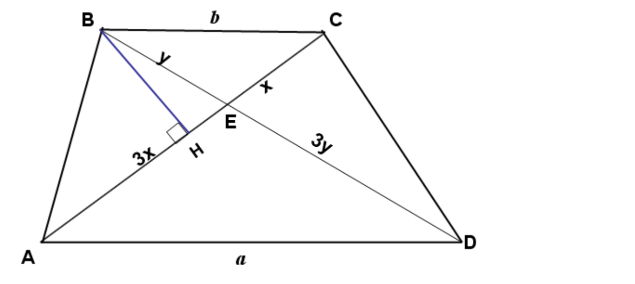
Примечание: *BC*|| *AD* - *2 случая*, *AB* || *CD*

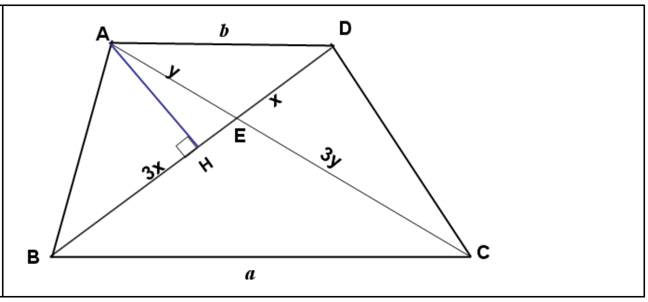
Решение: 1 способ

1 случай:

1) Пусть AE = 3x, а EC = x., BH = h. Так как $\Delta AED \sim \Delta BEC$ по двум углам, то ED : BE = 3 : 1, тогда коэффициент подобия к = 3, ED = 3y, BE = y. Также AD: BC = 3 : 1, $a = 3$ b.

2) $S_{AED} = 9$, $S_{BEC} : S_{AED} = 1 : 9 \Rightarrow S_{BEC} = 9 : 9 = 1$.





3) $S_{BEC} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot h$, $S_{ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot h \Rightarrow S_{ABE} = 3 \cdot S_{BEC} = 3$. $S_{ABE} = S_{DEC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\,xy \cdot \sin E \Rightarrow S_{DEC} = 3$.

4) $S_{ABCD} = S_{AED} + S_{ABE} + S_{DEC} + S_{BEC} = 9 + 3 + 3 + 1 = 16$.

2 случай:

1) Пусть AE = y, а EC = 3y, AH = h. Так как $\Delta AED \sim \Delta BEC$ по двум углам, то ED : BE = 1 : 3, ED = x, BE = 3x.

Также AD: BC = 1 : 3, $a = 3$ b.

2) $S_{AED} = 9$, $S_{BEC} : S_{AED} = 9 : 1 \Rightarrow S_{BEC} = 9 \cdot 9 = 81$.

3) $S_{AED} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot h$, $S_{ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot h \Rightarrow S_{ABE} = 3 \cdot S_{AED} = 3 \cdot 9 = 27$. $S_{ABE} = S_{DEC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\,xy \cdot \sin E \Rightarrow$ $S_{DEC} = 27$.

4) $S_{ABCD} = S_{AED} + S_{ABE} + S_{DEC} + S_{BEC} = 9 + 27 + 27 + 81 = 144$.

3 случай:

Рассмотреть вариант AB || CD (ответ: 48)

2 способ решения

1 случай:

1) Пусть AE = y, а EC = 3y, EH = h. Так как $\Delta AED \sim \Delta BEC$ по двум углам, то ED : BE = 1 : 3, и ED = x, BE = 3x.

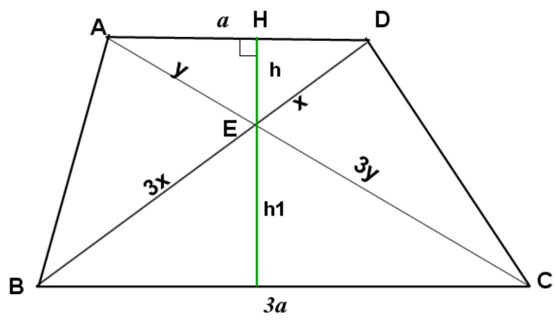
Также AD: BC = 1 : 3, AD = *a*, BC = 3*a*.

2) $S_{AED} = 9 \Rightarrow 0{,}5 \cdot a \cdot h = 9$, $h = 18 : a$,

$\Rightarrow h_1 = 54 : a \Rightarrow S_{BEC} = 0{,}5 \cdot 3\,a \cdot 54 : a = 81$.

3) Высота трапеции ABCD равна

$h + h' = \dfrac{18}{a} + \dfrac{54}{a} = \dfrac{72}{a}$, тогда $S_{ABCD} = \dfrac{4a}{2} \cdot \dfrac{72}{a} = 144$



2 случай: (аналогичен)

Ответ: 144; 48; 16.

2.3.13. (2010) Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 36, *CD* = 34 и верхним основанием BC = 10 . Известно, что $\cos \angle DEC = -\dfrac{1}{3}$. Найдите *BD*.

Решение:

1) Из ΔABC по теореме косинусов найдем AC (так как $\cos\angle ABC = -\dfrac{1}{3}$ отрицательное число, то $\angle ABC$ – тупой) .

$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = 36^2 + 10^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10 = 1636$.

2) Из ΔABH: $h^2 = AB^2 – AH^2$, Из ΔACP: $h^2 = AC^2 – AP^2$, тогда $AB^2 – AH^2 = AC^2 – AP^2$, или $36^2 – x^2 = 1636 – (x + 10)^2$, отсюда x = 12.

3) $h^2 = AB^2 – AH^2 = 36^2 – 12^2 = 24\sqrt{2}$.

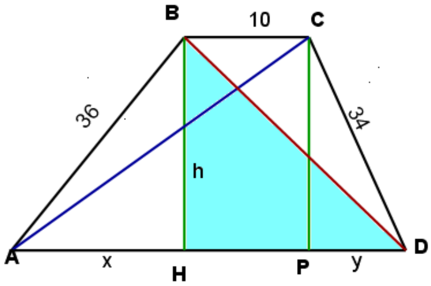


Рис.1.

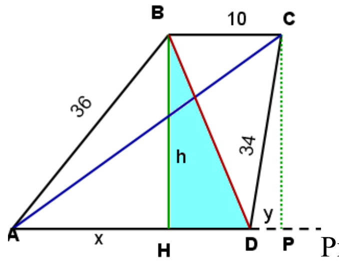


Рис. 2.

4) Из ΔPDC найдем y: $y^2 = CD^2 – h^2 = 34^2 – (24\sqrt{2})^2 = 2$.

5. Из Рис. 1 имеем: $BD^2 = h^2 + HD^2 = (24\sqrt{2})^2 + (10 + 2)^2 = 1152 + 144 = 1296$, BD = 36.

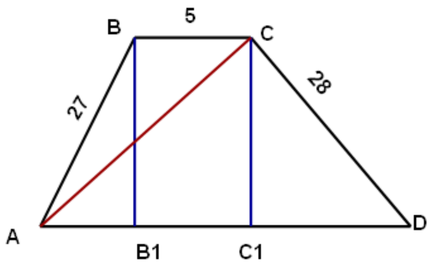
Из Рис. 2 получим: $BD^2 = h^2 + HD^2 = (24\sqrt{2})^2 + (10 - 2)^2 = 1152 + 64 = 1216$, $BD = 8\sqrt{19}$.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

2.3.14. В трапеции ABCD известны боковые стороны AB = 27, CD = 28 и верхнее основание BC = 5. Известно, что $\cos\angle DCB = -\dfrac{2}{7}$. Найдите AC.

Решение:

1 случай:

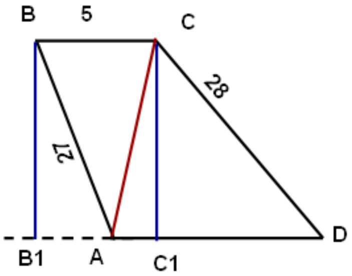


1) $\cos\angle DCB = -\dfrac{2}{7}$, тогда $\cos\angle CDA = \dfrac{2}{7}$, откуда

$DC_1 = 28 \cdot \dfrac{2}{7} = 8$, а $CC_1 = \sqrt{28^2 - 8^2} = \sqrt{720}$.

2) Из ΔABB_1 имеем: $AB_1 = \sqrt{27^2 - 720} = 3$.

3) $AC_1 = 5 + 3 = 8$, $AC = \sqrt{720 + 64} = 28$.



2 случай:

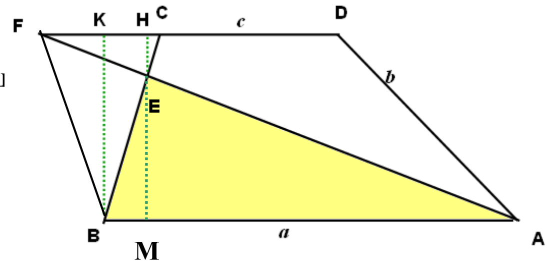
1) $DC_1 = 28 \cdot \dfrac{2}{7} = 8$; 2) Из ΔABB_1, $AB_1 = \sqrt{27^2 - 720} = 3$.

3) $AC_1 = 5 – 3 = 2$. $AC = \sqrt{720 + 4} = 2 \cdot \sqrt{181}$.

Ответ:

2.3.15. (2010) В трапеции *ABCD* биссектриса угла *A* пересекает боковую сторону *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ABE*, если площадь трапеции равна *S*, *AB* = *a*,
AD = *b*, *CD* = *c* (*c* < *a*).

Решение:



$S_{ABE} = S_{ABCD} – S_{AECD} = S - S_{AECD}$.

$S_{AECD} = S_{AFD} – S_{EFC}$.

1) Найдем S_{AFD}: FD || AB ⇒ ∠EAB =∠ EFC как накрест лежаш

EAB = ∠ EAD, тогда

∠ EAD = ∠ EFC, то есть ΔFDA – равнобедренный, основание

Так как $S_{ABCD} = \dfrac{a+c}{2}h = S$, то $h = \dfrac{2S}{a+c}$, где h = BK. $S_{AFD} = \frac{1}{2}$ b· h, $S_{AFD} = \frac{1}{2} b\cdot \frac{2S}{a+c} = \frac{Sb}{a+c}$.

2) Для того, чтобы вычислить S_{EFC}, рассмотрим подобные треугольники ABE и EFC.

Пусть HE = x, тогда EM = h – x, FC = b – c. $\frac{AB}{FC} = \frac{EM}{HE}$ или $\frac{a}{b-c} = \frac{h-x}{x}$.

Отсюда x = $\frac{(b-c)h}{a+b-c}$; x = HE = $\frac{2S(b-c)}{(a+c)\cdot((a+b-c)}$. $S_{EFC} = \frac{1}{2}\cdot$(b – c) $\cdot \frac{2S(b-c)}{(a+c)\cdot((a+b-c)} =$ $\frac{S(b-c)^2}{(a+c)(a+b-c)}$.

3)$S_{AECD} = S_{AFD} - S_{EFC}$. $S_{AECD} = \frac{Sb}{a+c} - \frac{S(b-c)^2}{(a+c)(a+b-c)} = \frac{Sb(a+b-c)-S(b-c)^2}{(a+c)(a+b-c)}$

4)S_{ABE} = S - S_{AECD}

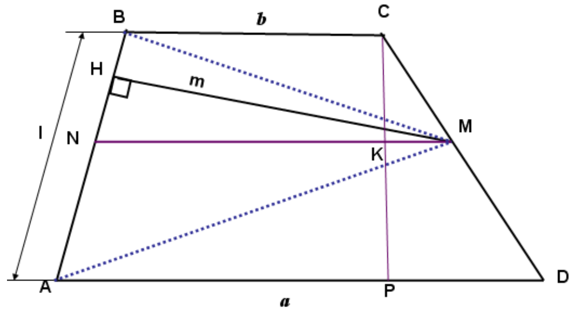
$S_{ABE} = S - \frac{Sb(a+b-c)-S(b-c)^2}{(a+c)(a+b-c)} = \frac{S\cdot(a+c)(a+b-c)-Sb(a+b-c)+S(b-c)^2}{(a+c)(a+b-c)} =$

$= \frac{S(b-c)^2 - S(b-c+a)(b-c-a)}{(a-c)(a+b-c)} = \frac{S(b-c)^2 - S(b-c)^2 + Sa^2}{(a-c)(a+b-c)} = \frac{Sa^2}{(a-c)(a+b-c)}$

Ответ: $\frac{Sa^2}{(a-c)(a+b-c)}$.

2.3.16. (2010) Боковая сторона *AB* трапеции *ABCD* равна *l*, а расстояние от середины *CD* до прямой *AB* равно *m*. Найдите площадь трапеции.

Решение:



Пусть AD = *a*, BC = b.

Построим MN - среднюю линию трапеции. MN = $\frac{a+b}{2}$

.

CK = KP = h

1) $S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot MH = \frac{1}{2}$ m·l.

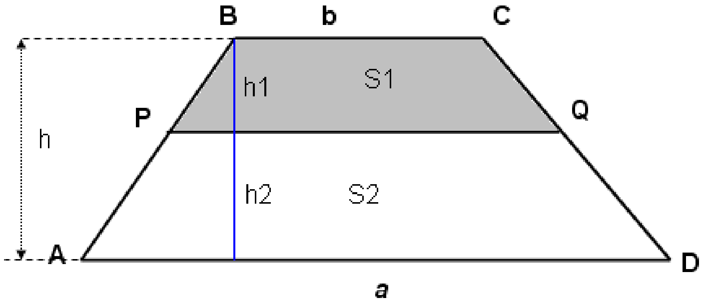
2) $S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{1}{2}$ m·l.

3) $S_{BCM} = \frac{1}{2}$ b· h, $S_{AMD} = \frac{1}{2} a\cdot$ h, $\Rightarrow$ $S_{BCM} + S_{AMD} = \frac{a+b}{2}\cdot h$.

4) Тогда $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{AMD} = \frac{a+b}{2}\cdot h + \frac{a+b}{2}\cdot h = 2\cdot\frac{1}{2}$ m·l = m·l.

Ответ: m·l.

2.3.17. На боковых сторона AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем HQ || AD. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции. площади которых относятся как 1:2. Найдите PQ, если AD = *a* и BC = *b*.



Решение:

1 случай: Пусть $S_1 : S_2 = 1 : 2$, то есть $S_2 = 2\cdot S_1$, а $PQ = x$.

1) Так как $S_2 = 2\cdot S_1$, то $\dfrac{a+x}{2}(h-h_1) = \dfrac{2(b+x)}{2}h_1$, $h_1 = \dfrac{(a+x)\cdot h}{2b+3x+a}$

2) Так как площадь всей трапеции $S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h = 3\cdot S_1$, то составим равенство:

$\dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{3\cdot(b+x)}{2}h_1$; $\dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{3\cdot(b+x)}{2}\cdot\dfrac{(a+x)\cdot h}{2b+3x+a}$; Сократим обе части на h и умножим на 2:

$(a+b)\cdot(a+2b+3x) = 3\cdot(b+x)\cdot(a+x)$, отсюда $3x^2 = a^2 + 2b^2$ или

$x = \sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$.

2 случай: Пусть $S_1 : S_2 = 2 : 1$, то есть $S_1 = 2\cdot S_2$, а $PQ = x$.

1) Так как $S_1 = 2\cdot S_2$, то $\dfrac{b+x}{2}(h-h_2) = \dfrac{2(a+x)}{2}h_2$, $h_2 = \dfrac{(b+x)\cdot h}{2a+3x+b}$

2) Так как площадь всей трапеции $S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h = 3\cdot S_2$, то составим равенство:

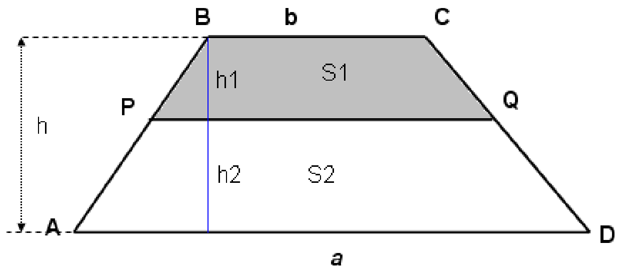
$\dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{3\cdot(a+x)}{2}h_2$; $\dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{3\cdot(a+x)}{2}\cdot\dfrac{(b+x)\cdot h}{2a+3x+b}$; Сократим обе части на h и умножим на 2: $(a+b)\cdot(2a+b+3x) = 3\cdot(b+x)\cdot(a+x)$, отсюда $3x^2 = 2a^2 + b^2$ или

$x = \sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$.

2.3.18. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Решение:

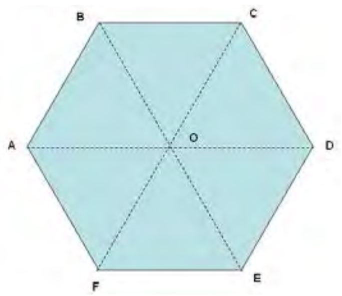


$S_1 : S_2 = 2 : 3$ или $S_1 : S_2 = 3 : 2$

Задание аналогичное предыдущему (заданию ФИПИ, 383 - Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ. 2010. 10 в.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$.

2.3.19. Сторона правильного шестиугольника равна $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$. Найдите сторону равновеликого ему правильного треугольника.



ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства правильного шестиугольника;
2) формула площади правильного шестиугольника;
3)формулы площади правильного треугольника;

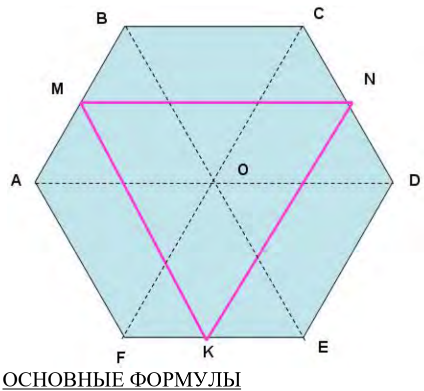
Решение:
1) Так как шестиугольник правильный, то его площадь равна

$$S_6=\frac{3\,a_6^{\,2}\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

2) $S_3=\dfrac{a_3^{\,2}\sqrt{3}}{4}=\dfrac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a_3=5$

Ответ: 5.

2.3.20. (ДВ) Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна 32√3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K − середины сторон AB, CD, EF соответственно.
Ответ: 24.



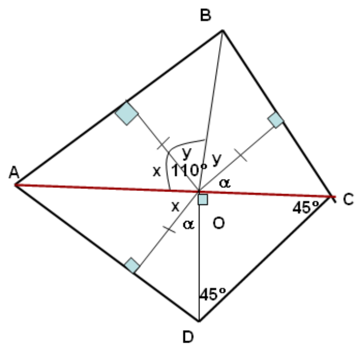
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) Свойства правильного шестиугольника;
2) формулы площадей треугольника;
3) свойства трапеции.

Решение:
1) Так как шестиугольник правильный, то OA = AB = R = 32√3. AD = 2R ⇒ 64 √3.BC | | AD, MN - средняя линия трапеции ABCD ⇒ MN = 0,5(BC + AD) = = 0,5 ·96 √3 = 48 √3.
2) 2) MK и NLK – аналогично.
3) S_{MNK} = MN^2 · √3 : 4
4) S_{MNK} = 0,5· 3MN : r ⇒

r = S_{MNK} : (0,5· 3MN) = MN^2 · √3 : 4 : (0,5· 3MN) = = MN· √3 : 6 = 48 √3 · √3: 6 = 48 : 2 = 24.

Ответ: 24.

2.3.21. Точка O лежит на диагонали AC выпуклого четырехугольника ABCD. Известно, что OC = OD и что O одинаково удалена от прямых AB, BC и AD. Найдите углы четырехугольника, если ∠AOB = 110° и ∠COD = 90°.
Решение:



1) x + y = 110°, 2 (x + y) + 2 α = 270° ⇒ α = 25°, ⇒ ∠ACB = ∠ADO = 90° - 25° = 65°, а ∠DCB = ∠ADC = 65° + 45° = 110°.

2)ΔAOB – равнобедренный прямоугольный, ∠ADO = 65° ⇒ ∠OAD = 90° - 65° = 25°, ∠OAD = ∠OAB = 25° ⇒ ∠DAB = 50°.

3) ∠B = 360° - (110° + 110° + 50°) = 90°.

Ответ: ∠C = ∠D = 110°, ∠A = 50°, ∠B = 90°.

2.3.22. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции ABCD. Известно, что $\angle ACD = \angle CBD = \angle ABM = \arccos\frac{5}{6}$ и AB = 9. Найти BM.

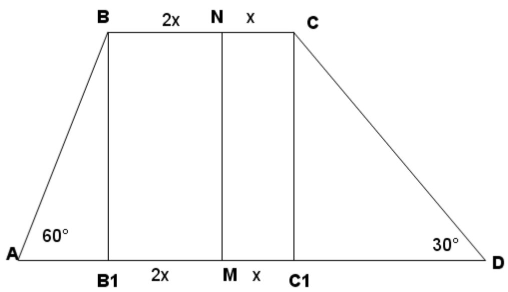
Ответ: 15.

2.3.23. Во вписанном четырехугольнике ABCD точка X лежит на стороне AD, причем BX || CD и CX || BA. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и DX = 6.

Ответ: BC = 3.

2.3.24. В трапеции ABCD углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $\frac{BN}{NC} = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найти $\frac{AM}{MD}$.

Решение:



1)Пусть $BB_1 = y$, тогда $AB_1 = \frac{y}{\mathrm{tg}60^\circ} = \frac{y}{\sqrt{3}}$, а $AM = \frac{y}{\sqrt{3}} + 2x$;

$DC_1 = \frac{y}{\mathrm{tg}30^\circ} = \frac{3y}{\sqrt{3}}$, а $DM = \frac{3y}{\sqrt{3}} + x$;

2)$S_{BNMA} = \frac{AM+BN}{2}\cdot BB_1 = \frac{\frac{y}{\sqrt{3}}+4x}{2}\cdot BB_1$; $S_{NCDM} = \frac{DM+CN}{2}\cdot BB_1 = \frac{\frac{3y}{\sqrt{3}}+2x}{2}\cdot BB_1$;

Так как площади равны, то $\frac{\frac{y}{\sqrt{3}}+4x}{2}\cdot BB_1 = \frac{\frac{3y}{\sqrt{3}}+2x}{2}\cdot BB_1$, или $\frac{y}{\sqrt{3}} + 4x = \frac{3y}{\sqrt{3}} + 2x$,

$2x = \frac{2y}{\sqrt{3}}$, $y = x\sqrt{3}$;

3) AM = 3x; DM = 4x; $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

2.3.25. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол 60°. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка соединяющего середины оснований.

Решение:

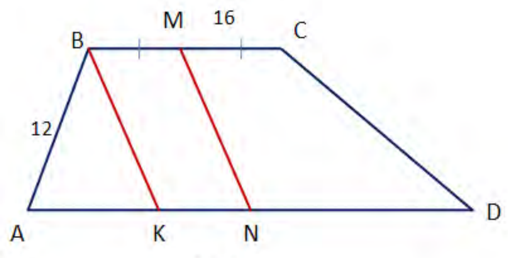


Рис.1

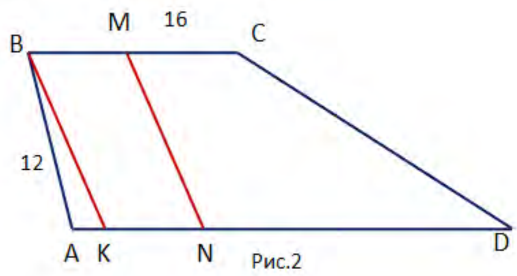


Рис.1: ∠A = 60°; AK = 40:2 – 8 = 12; ΔABK – равносторонний, ⇒ BK = MN = 12.
Рис.2: ∠B = 60° ⇒∠A = 120°, AK = 12, тогда по теореме косинусов, имеем

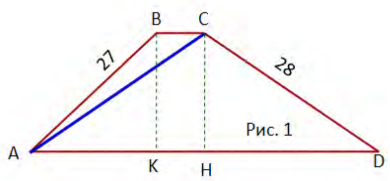
BK = MN = $\sqrt{2\cdot 144 + 2\cdot 144\cdot\frac{1}{2}}$ = $12\sqrt{3}$.

Ответ: 12 или $12\sqrt{3}$.

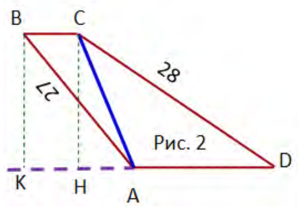
2.3.26. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

Решение. Пусть AD = *a*, BC = *b*, CH = h. DH = $\frac{AD-BC}{2} = \frac{a-b}{2}$,
тогда AH = $\frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$. Так как S_{ABCD} = 12, $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\cdot$h,
$\frac{a+b}{2}\cdot$h = 12, то есть AH·h = 12. По теореме Пифагора $AH^2 + h^2 = 25$, то h = 3 или h = 4.
Ответ: 3 или 4. (*Ответ*: 12 или 6 $\sqrt{13}$, не совпадает с моим).

2.3.27. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 и основанием BC = 5. Известно, что cos∠BCD = - $\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.



Решение: 1) $cos\angle BCD$ = - $\frac{2}{7}$, тогда
$sin\angle BCD$ = = $\sqrt{1-cos^2\angle BCD}$ =
$\sqrt{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.



∠CDA = 180° - ∠BCD, а sin∠CDA = sin(180° - ∠BCD) = sin∠BCD =$\frac{3\sqrt{5}}{7}$, *а*
cos∠CDA = cos(180° - ∠BCD) = - cos∠BCD = $\frac{2}{7}$.

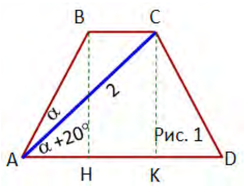
2) Из Δ HCD sin∠BCD = $\frac{CH}{CD} = \frac{CH}{28}$, CH = 28 $\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$, *а* cos∠CDA = $\frac{DH}{CD} = \frac{DH}{28}$, DH = $\frac{2}{7}\cdot 28 = 8$.

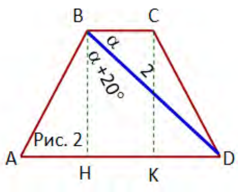
3) Из ΔABK AK = $\sqrt{27^2-\left(12\sqrt{5}\right)^2}$ = 3; BC = KH = 5.

4) По Рис.1. имеем: AH = AK + KH = 5 + 3 = 8, из ΔACH получим AC = $\sqrt{AH^2+CH^2}$ =
$\sqrt{8^2+\left(12\sqrt{5}\right)^2}$ = 28.

По Рис.2. имеем: AH = AK - KH = 5 - 3 = 2, из ΔACH получим AC = $\sqrt{AH^2+CH^2} = \sqrt{2^2+\left(12\sqrt{5}\right)^2}$ =
$\sqrt{724} = 2\sqrt{181}$.
Ответ: 28 или 2 $\sqrt{181}$.

2.3.28. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.





Решение: 1) $S_{\text{трап.}} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{AD+BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{BH}$.

2) $KD = AH = \frac{AD-BC}{2}$, $BH = CK = h$.

$AK = HD = BC + KD = BC + \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$.

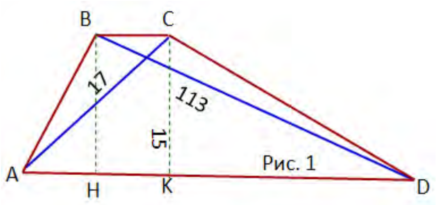
3) По т. Пифагора из ΔACK имеем: $4 = h^2 + \left(\frac{AD+BC}{2}\right)^2$

Или $4 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{h}\right)^2$, $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{3}$.

4)Если $h_1 = 1$, то по Рис. 1 $\alpha + 20° = 30°$, $\alpha = 10°$, а $\angle BAD = 40°$,
а по Рис. 2 получим, что $\alpha = 30°$, $\alpha + 20° = 50°$, $\angle ABC = 80°$ что не соответствует построению.
Если $h_2 = \sqrt{3}$, то по Рис. 1 $\alpha + 20° = 60°$, $\alpha = 40°$, а $\angle BAD = 100°$, что не соответствует построению, а по Рис. 2 получим, что $\alpha = 60°$, $\alpha + 20° = 80°$, $\angle ABC = 100°$,
$\angle BAD = 180° - 100° = 80°$.

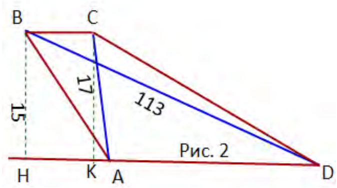
Ответ: 40° или 80°

2.3.29. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна ее площадь?



Решение: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2}$;
$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2}$;
$HD = \sqrt{113^2 - 15^2} = 112$,
$AK = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$;

Рис.1:
$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CK = \frac{AK+(KD+HK)}{2} \cdot CK$.



$S_{ABCD} = \frac{8+112}{2} \cdot 15 = 900$.

Рис.2: $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CK = \frac{(HD-HK-KA)+HK}{2} \cdot CK = \frac{HD-KA}{2} \cdot CK = \frac{112-8}{2} \cdot 15 = 780$.

Ответ: 900 или 780.

2.3.30. Площадь трапеции ABCD равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение:

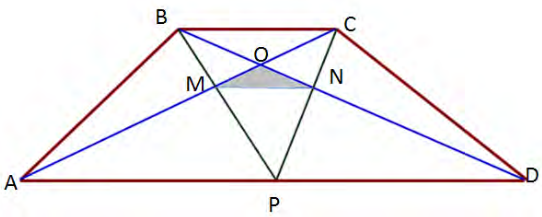


Рис. 1

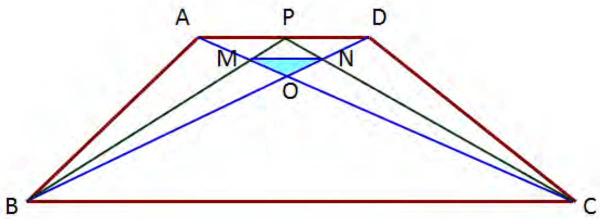


Рис. 2

Рис.1.

1) Так как AD = 2 BC, то AP = BC, ABPC и BCDP – параллелограммы. По свойству параллелограмма $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta CBP} = S_{\Delta CDP} = 135 : 3 = 45$, и $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACP} = 45$.

Так как Δ BOC ~ Δ AOD, $k = \frac{1}{2}$, то AO = 2 OC, тогда $S_{\Delta OBC} = 2 \cdot S_{\Delta OAD} = \frac{1}{3} \cdot 45 = 15$.

2) Пусть OC = x, тогда AO = 2x, а AC = 3x. AC и BP – диагонали параллелограмма, тогда $MC = \frac{1}{2} \cdot 3x = 1{,}5x$, $MO = 1{,}5x - x = 0{,}5x$, то есть ΔMON ~ ΔBOC, $k = \frac{1}{2}$. (MN – средняя линия ΔAOD, MN ∥ AD).

3) $S_{\Delta OMN} = \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta OBC} = \frac{1}{4} \cdot 15 = 3{,}75$.

Рис.2.
1)Пусть $S_{\Delta OAD} = t$, тогда $S_{\Delta OBC} = 4t$, а $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta OCD} = 2t$ $(BO = 2\cdot OD)$, тогда
$S_{ABCD} = t + 4t + 2t + 2t = 9t$, $t = 135 : 9 = 15$. $S_{\Delta OAD} = 15$.
2) $\Delta AMP \sim \Delta BMC$, $k = \frac{1}{4}$, так как $AP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}BC$, тогда $AM = \frac{1}{4}\cdot MC$ или $AM = \frac{1}{5}\cdot AC$.
3)Пусть $AO = x$, $OC = 2x$, $AC = 3x$, $AM = \frac{3}{5}x$, а $OM = x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$.
4) $\Delta OMN \sim \Delta AOD$, $k = \frac{2}{5}$. $S_{\Delta OMN} = \frac{4}{25}\cdot S_{\Delta OAD} = \frac{4}{25}\cdot 15 = 14{,}4$.
Ответ: 22,5 или 2,4.

2.3.31. (2010) Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 36, *CD* = 34 и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle DEC = -\frac{1}{3}$. Найдите *BD*.

Решение:

1) Из ΔABC по теореме косинусов найдем AC (так как $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$ отрицательное число, то $\angle ABC$ – тупой) .
$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos\angle ABC = 36^2 + 10^2 + 2\cdot 12\cdot 10 = 1636$.
2) Из ΔABH: $h^2 = AB^2 - AH^2$, Из ΔACP: $h^2 = AC^2 - AP^2$, тогда $AB^2 - AH^2 = AC^2 - AP^2$, или $36^2 - x^2 = 1636 - (x + 10)^2$, отсюда $x = 12$.
3) $h^2 = AB^2 - AH^2 = 36^2 - 12^2 = 24\sqrt{2}$.

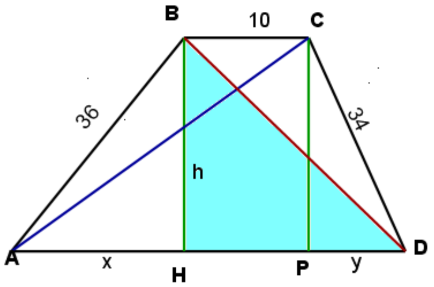


Рис.1.

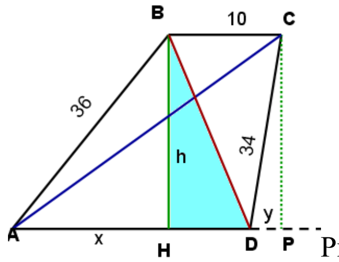


Рис. 2.

4) Из ΔPDC найдем y: $y^2 = CD^2 - h^2 = 34^2 - (24\sqrt{2})^2 = 2$.
5. Из Рис. 1 имеем: $BD^2 = h^2 + HD^2 = (24\sqrt{2})^2 + (10 + 2)^2 = 1152 + 144 = 1296$, $BD = 36$.
Из Рис. 2 получим: $BD^2 = h^2 + HD^2 = (24\sqrt{2})^2 + (10 - 2)^2 = 1152 + 64 = 1216$, $BD = 8\sqrt{19}$.
Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

2.3.32. Площадь трапеции ABCD равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение:

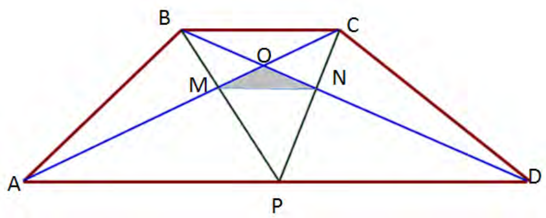


Рис. 1

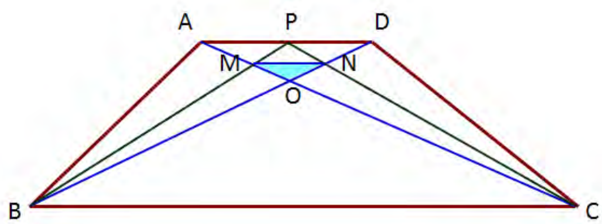


Рис. 2

Рис.1.
1) Так как AD = 2 BC, то AP = BC, ABPC и BCDP – параллелограммы. По свойству параллелограмма $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta CBP} = S_{\Delta CDP} = 810 : 3 = 270$, и $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACP} = 270$.
Так как $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, $k = \frac{1}{2}$, то $AO = 2\,OC$, тогда $S_{\Delta OBC} = 2\cdot S_{\Delta OAD} = \frac{1}{3}\cdot 270 = 90$.

2) Пусть OC = x, тогда AO = 2x, а AC = 3x. AC и BP – диагонали параллелограмма, тогда MC = $\frac{1}{2}\cdot$ 3x = 1,5 x, MO = 1,5x – x = 0,5x, то есть $\Delta MON \sim \Delta BOC$, $k = \frac{1}{2}$. (MN – средняя линия ΔAOD, MN ∥ AD).

3) $S_{\Delta OMN} = \frac{1}{4}\cdot S_{\Delta OBC} = \frac{1}{4}\cdot 90 = 22{,}5$.

Рис.2.

1)Пусть $S_{\Delta OAD} = t$, тогда $S_{\Delta OBC} = 4t$, а $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta OCD} = 2t$ (BO = 2·OD), тогда $S_{ABCD} = t + 4t + 2t + 2t = 9t$, $t = 810 : 9 = 90$. $S_{\Delta OAD} = 90$.

2) $\Delta AMP \sim \Delta BMC$, $k = \frac{1}{4}$, так как $AP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}BC$, тогда $AM = \frac{1}{4}\cdot MC$ или $AM = \frac{1}{5}\cdot AC$.

3)Пусть AO = x, OC = 2x, AC = 3x, $AM = \frac{3}{5}x$, а $OM = x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$.

4) $\Delta OMN \sim \Delta AOD$, $k = \frac{2}{5}$. $S_{\Delta OMN} = \frac{4}{25}\cdot S_{\Delta OAD} = \frac{4}{25}\cdot 90 = 14{,}4$.

Ответ: 22,5; 14,4.

2.3.33. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 и основанием BC = 5. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

Решение:

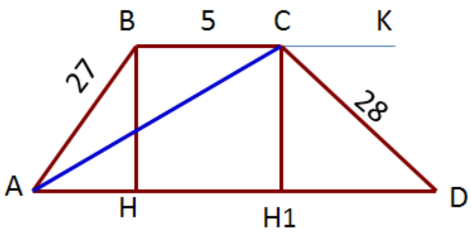


Рис.1

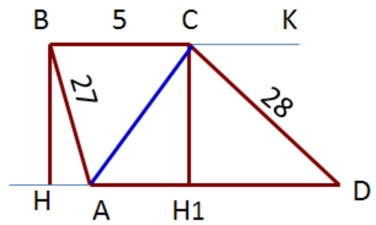


Рис.2

1) $\cos\angle KCD = \cos(180° - \angle BCD) = -\cos\angle BCD = \frac{2}{7}$, $\sin\angle KCD = \sin\angle CDH_1 = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.
$CH_1 = CD\cdot\sin\angle CDH_1 = 12\sqrt{5} = BH$.

2) По теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{27^2 - (12\sqrt{5})^2} = \sqrt{3^2\cdot 9^2 - 3^2\cdot 4^2\cdot 5} = 3$.

3) Рис.1. $AH_1 = AH + HH_1 = 8$,

$AC = \sqrt{AH_1{}^2 + CH_1{}^2} = \sqrt{4^2\cdot 2^2 + 3^2\cdot 4^2\cdot 5} = 4\cdot\sqrt{2^2 + 3^2\cdot 5} = 28$.

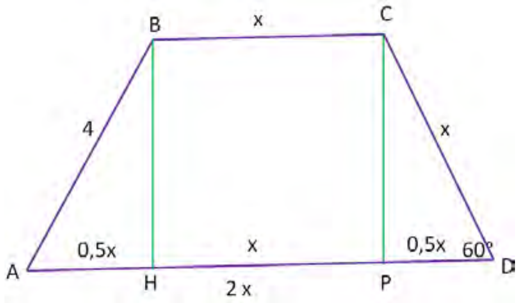
Рис.2. $AH_1 = HH_1 - AH = 2$, $AC = \sqrt{AH_1{}^2 + CH_1{}^2} = \sqrt{2^2 + (12\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{181}$.

Ответ: 28; $2\sqrt{181}$.

2.3.34. (Реальный ГИА_2013, B_1318) В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основание BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 4. Найдите площадь трапеции.

Решение:

1) Пусть BC = x, тогда AD = 2x, а CD = x.
Построим CP и BH перпендикулярные AD.
2) $\angle CDP = 60°$, тогда $\angle DCP = 30°$, а DP = 0,5x,
AH = 2x – 1,5x = 0,5x, т.е. $\Delta DCP = \Delta ABH$ по катетам,
тогда x = 4, 2x = 8, $CP = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
3) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot CP = \frac{8+4}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.
Ответ: $12\sqrt{3}$.



2.3.35. (ТВ№1-2013 от А.Л.) В трапеции KLMN известны боковые стороны KL = 36, MN = 34, верхнее основание LM = 10, и $\cos\angle KLM = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ LN.

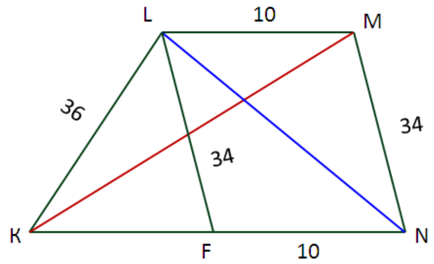
Решение:

1)Построим LF // MN, LF = 34; $\cos\angle KLM = -\frac{1}{3}$, $\cos\angle LKN = \frac{1}{3}$, $LF^2 = KL^2 + KF^2 - 2\,KL\cdot KF\cos\angle LKN$;

$34^2 = 36^2 + x^2 - 2\cdot 36\cdot x\cdot\frac{1}{3}$; $x^2 - 24x + 140 = 0$; $D_1 = 4$;

$x_1 = 14$; $x_2 = 10$.

2) $x_1 = 14$, KN = 24,



$LN = \sqrt{36^2 + 24^2 - 2\cdot 36\cdot 24\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{1296 + 576 - 576} = 36.$

3) $x_2 = 10$, KN = 20,

$LN = \sqrt{36^2 + 20^2 - 2\cdot 36\cdot 20\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{1296 + 400 - 480} = \sqrt{1216} = 8\sqrt{19}.$

Ответ: 36; $8\sqrt{19}$.

2.3.36. (ТВ№19-2013 от А.Л.) Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1 : 3.

Решение:
Примечание: BC|| AD - 2 случая, AB || CD
Решение: 1 способ

1 случай: (Рис. 1)

1) Пусть AE = 3x, а EC = x., BH = h.
Так как ΔAED ~ ΔBEC по двум углам, то ED : BE = 3 : 1, тогда коэффициент подобия к = 3, ED = 3y, BE = y.
Также AD: BC = 3 : 1, $a = 3$ b.

2) $S_{AED} = 9$, $S_{BEC} : S_{AED} = 1 : 9 \Rightarrow S_{BEC} = 9 : 9 = 1$.

3) $S_{BEC} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot h$, $S_{ABE} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot h \Rightarrow S_{ABE} = 3\cdot S_{BEC} = 3$.

$S_{ABE} = S_{DEC} = \frac{1}{2}\cdot 3\,xy\cdot\sin E \Rightarrow S_{DEC} = 3$.

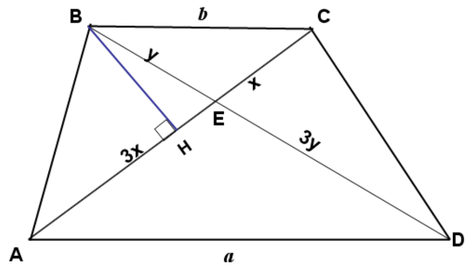


Рис. 1

4) $S_{ABCD} = S_{AED} + S_{ABE} + S_{DEC} + S_{BEC} = 9 + 3 + 3 + 1 = 16$.

2 случай: Рис. 2
1) Пусть AE = y, а EC = 3y, AH = h. Так как ΔAED ~ ΔBEC по двум углам, то ED : BE = 1 : 3, ED = x, BE = 3x.
Также AD: BC = 1 : 3, $a = 3$ b.

2) $S_{AED} = 9$, $S_{BEC} : S_{AED} = 9 : 1 \Rightarrow S_{BEC} = 9\cdot 9 = 81$.

3) $S_{AED} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot h$, $S_{ABE} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot h \Rightarrow S_{ABE} = 3\cdot S_{AED} = 3\cdot 9 = 27$. $S_{ABE} = S_{DEC} = \frac{1}{2}\cdot 3\,xy\cdot\sin E \Rightarrow S_{DEC} = 27$.

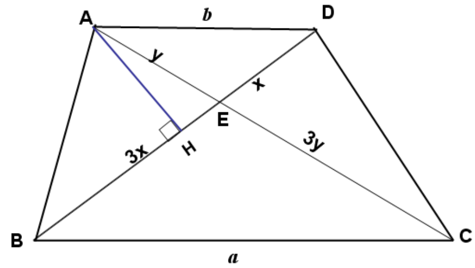


Рис.2

4) $S_{ABCD} = S_{AED} + S_{ABE} + S_{DEC} + S_{BEC} = 9 + 27 + 27 + 81 = 144$.

3 случай: Рис.3.

Рассмотреть вариант AB || CD (ответ: 48)

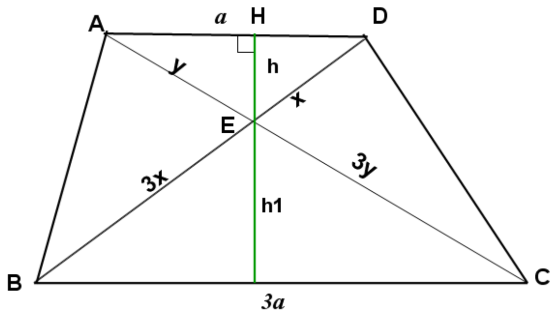


Рис. 3

<u>2ой способ решения</u>

1 случай:

1) Пусть AE = y, а EC = 3y, EH = h. Так как $\Delta AED \sim \Delta BEC$ по двум углам, то ED : BE = 1 : 3, и ED = x, BE = 3x.

Также AD: BC = 1 : 3, AD = *a*, BC = 3*a*.

2) $S_{AED} = 9 \Rightarrow 0{,}5 \cdot a \cdot h = 9$, $h = 18 : a$,

$\Rightarrow h_1 = 54 : a \Rightarrow S_{BEC} = 0{,}5 \cdot 3a \cdot 54 : a = 81$.

3) Высота трапеции ABCD равна

$h + h\cdot = \dfrac{18}{a} + \dfrac{54}{a} = \dfrac{72}{a}$, тогда $S_{ABCD} = \dfrac{4a}{2} \cdot \dfrac{72}{a} = 144$

2 случай: (аналогичен)

Ответ: 144; 48; 16.

2.3.37. (ТВ№20-2013 от А.Л.) Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20 градусов больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

<u>Решение:</u>

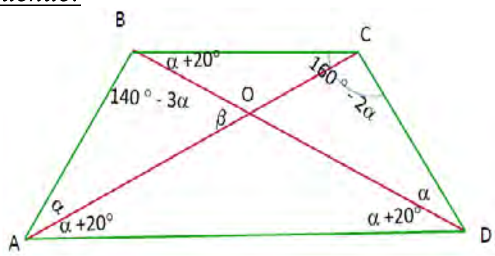


Рис.1

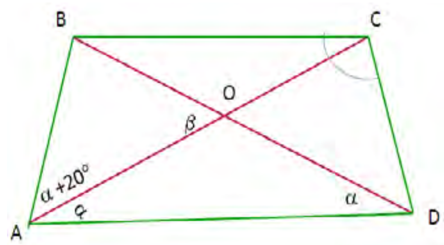


Рис.2

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 \cdot \sin\beta = \sqrt{3}$;

$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60°$, а $\angle AOD = 120°$.

2) Рис.1 Из ΔAOD $\alpha + 20° = 30°$,

$\alpha = 30° - 20° = 10°$, а $\angle BAD = 40$

Рис.2 3) Если $\angle OAOD = \alpha$, то $\alpha = 60° : 2 = 30°$, $\alpha + 20° = 50°$, тогда $\angle BAD = 30° + 50° = 80°$.

Ответ: 40°, 80°.

<u>2 способ решение СМ А. Ларин В_20, файл PDF</u>

2.3.38. (ТВ№38-2013, А. Л.) Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

<u>Решение:</u>

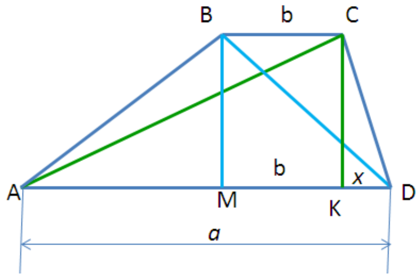


Рис.1

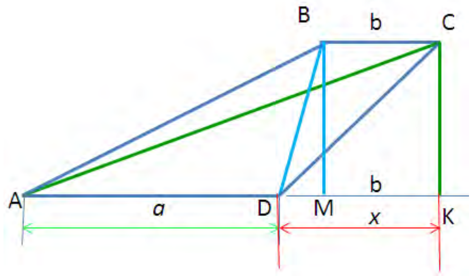


Рис.2

Рис.1: АК = $\sqrt{АС^2 - АК^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, АК = a – x = 12; MD = $\sqrt{BD^2 - MB^2} = \sqrt{41 - 5^2} = 4$,
MD = b + x; АК + MD = a – x + b + x = a + b = 16; $S_{тр.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = 8 \cdot 5 = 40$.
Рис.2: АК = $\sqrt{АС^2 - АК^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, АК = a + x = 12; MD = $\sqrt{BD^2 - MB^2} = \sqrt{41 - 5^2} = 4$,
MD = x – b; АК - MD = a + x + b - x = a + b = 12 – 4= 8; $S_{тр.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = 4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 40; 20.

2.3.39. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20°больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.

Решение:

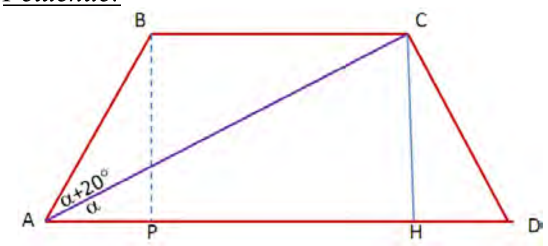


Рис.1

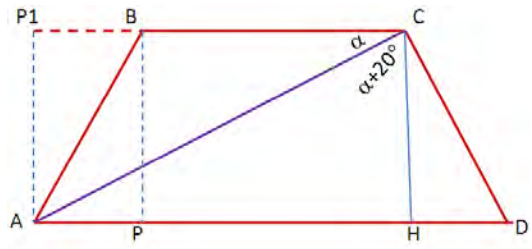
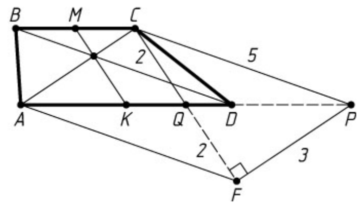


Рис.2

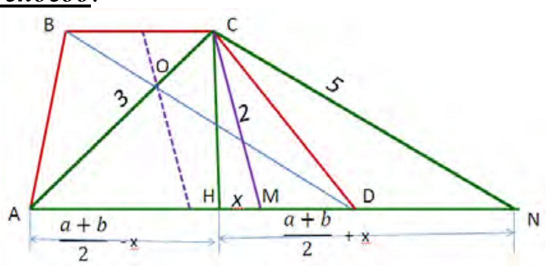
$BP = CH = AP_1 = 2 \cdot \sin\alpha$; $AH = P_1C = \frac{AD+BC}{2} = 2 \cdot \cos\alpha$;
$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = 2 \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\alpha = \sqrt{3}$; $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\alpha = 60°$(Рис.1) или $2\alpha = 120°$ (Рис.2).
$\angle A = 2\alpha + 20° = 80°$, $\angle C = 140°$, тогда $\angle D = \angle A = 180° - 140° = 40°$.
Ответ: 80°; 40°.
2.3.40. (И.В Ященко, А.С. Шестаков, 30 в. 2013г) Найдите площадь трапеции, если её диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2.

Решение:
1 способ:



1) Пусть М и К – середины сторон оснований. Построим CP// BD (BD = 5), тогда DP = BC, AP = AD + BC. $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}h$; $S_{ACP} = \frac{AD+BC}{2}h$
$S_{ABCD} = S_{ACP}$.
2)Построим CQ // MK. AK = $\frac{1}{2}$ AD, KQ =$\frac{1}{2}$ BC $\Rightarrow$
AQ = $\frac{1}{2}$ AD +$\frac{1}{2}$ BC = = $\frac{1}{2}$ (AD + BC) = $\frac{1}{2}$ (AD + DP), то есть AQ = QP и CQ – медиана ΔACP.
CQ = 2.
3) Продолжим CQ на отрезок QF = CQ = 2. Тогда ΔACQ = ΔPFQ по двум сторонам AQ = QP, QF = CQ и углу между ними, тогда FP = AC = 3, $S_{ACP} = S_{CFP}$. ΔCFP со сторонами CP = 5, CF = 4 и FP =3, тогда ΔCFP – прямоугольный.
4)$S_{CFP} = \frac{1}{2}$ FP ·FC = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \Rightarrow S_{ABCD} = 6$.
Ответ: 6.

2 способ:



1) Из ΔACH $CH^2 = AC^2 – AH^2$;
Из ΔMCH $CH^2 = MC^2 – MH^2$;
Из ΔMCH $CH^2 = NC^2 – NH^2$; Тогда
$CH^2 = 9 - \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2$; $CH^2 = 4 – x^2$;
$9 - \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 = 4 – x^2$; (*)

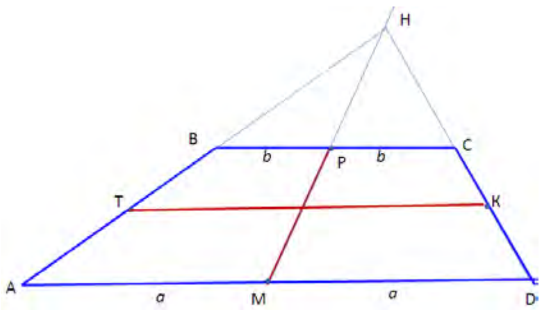
$CH^2 = 25 - \left(\frac{a+b}{2} + x\right)^2$; Тогда $25 - \left(\frac{a+b}{2} + x\right)^2 = 4 - x^2$ (**).

$\begin{cases} 9 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + (a+b)x = 4 \\ 25 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)x = 4 \end{cases}$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 13$, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{13}$, $9 - 13 + 2\sqrt{13}\,x = 4$. $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$,

$h = \frac{6}{\sqrt{13}} \Rightarrow S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \sqrt{13} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = 6$.

Ответ: 6.

2.3.41. (И.В Ященко, А.С. Шестаков, 30 в. 2013г) Углы при одном из оснований трапеции равны 19° и 71°, а отрезки соединяющие середины противоположных сторон, равны 12 и 10. Найдите основания трапеции.



Решение:

1)H – точка пересечения боковыс сторон трапеции, так как углы при оснований AD равны 19° и 71°, то ∠H = 90°. Тогда медиана HM равна половине гипотенузы, то есть HM = AM . Точки H, P и M лежат на одной прямой (M и P – середины оснований).

2) Если TK = 12, то $a + b = 12$, (TK = 10, то $a + b = 10$),а MP = 10 (MP = 12).

3) Δ AHM ~ Δ BHP : $\frac{AM}{BP} = \frac{HM}{HP}$; $\frac{a}{12-a} = \frac{a}{a-10}$ $\left(\frac{a}{10-a} = \frac{a}{a-12}\right)$; $2a = 22$ ($2a = 22$) $a = 11$; AD = 22, BC = 2.

Ответ:2 и 22.

3.1. Отношение отрезков
и площадей в треугольнике

- *Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*
- *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*
- *Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольника.*
- *Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).*
- *Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведению сторон этого угла.*
- *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.*
- *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*
- *Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.*

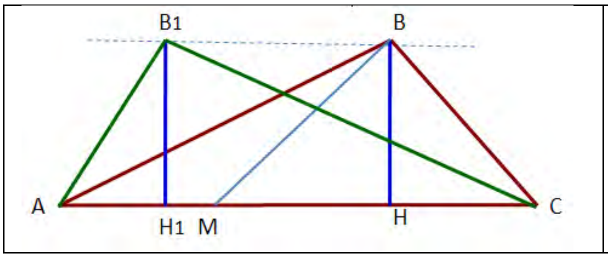
Опорные задачи:

- *Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.*

- *Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.*

- *. Площади треугольников имеющх равные основания и равные высоты равны;*

- *.Отношение площадей имеющих равные высоты равно отношению их оснований.*

	Доказательство. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{1}{2}AC\cdot BH}{\frac{1}{2}MC\cdot BH} = \frac{AC}{MC};$ Аналогично $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{1}{2}AM\cdot BH}{\frac{1}{2}MC\cdot BH} = \frac{AM}{MC};$

3.1.1. Площадь треугольника *ABC* равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника *CDE*.

<u>Решение:</u>

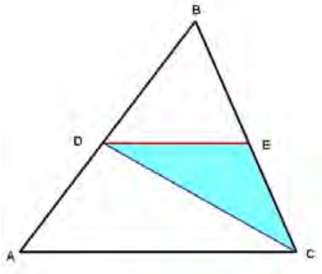


Рис. 1

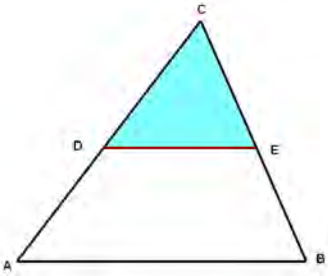


Рис. 2

1. (Рис. 1) Так как D – середина AB, то CD – медиана, тогда $S_{BDC} = \dfrac{1}{2} S_{ABC} = 2$.

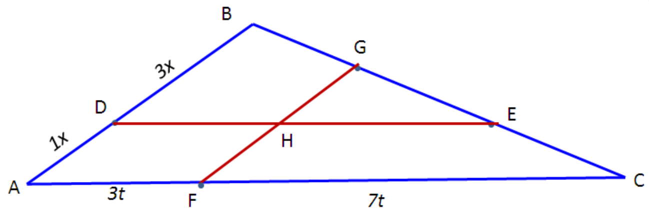
E - середина CB, то DE – медиана, тогда $S_{EDC} = \dfrac{1}{2} S_{DBC} = 1$.

2. (Рис. 2) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$, $k = 2$, и так как отношение площадей подобных фигур равно квадрату к – коэффициента подобия, то $S_{EDC} = \dfrac{1}{4} S_{ABC} = 1$.

Ответ: 1.

3.1.2.(ЮФМЛ г Ханты - Мансийск) В треугольнике ABC точка D на стороне AB, точка F на стороне AC, точки G и E на стороне BC расположены, что $AD: DB = 1:3$, $AF : FC = 3:7$ и $DE \parallel AC$, $GF \parallel AB$. Отрезки DE и FG пересекаются в точке H. Найти отношение $DH : HE$.

Решение:



1) $\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA} = \frac{3}{1}$ по теореме Фалеса.

Пусть BE = 3y, EC = y, тогда BC = 4y.

2) $\frac{CG}{GB} = \frac{CF}{FA} = \frac{7}{3}$, тогда $CG = \frac{4y \cdot 7}{10} = \frac{14y}{5}$,

$BG = \frac{6y}{5}$

3) $EG = CG - CE = \frac{14y}{5} - y = \frac{9y}{5}$.

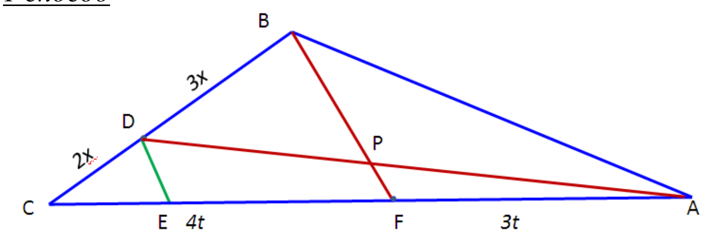
4) $\frac{EG}{GB} = \frac{EH}{HD} = \frac{9y}{5} : \frac{6y}{5} = \frac{3}{2}$, то есть $\frac{EH}{HD} = \frac{3}{2}$, а $DH : HE = 2 : 3$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

3.1.3. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC точка D на стороне BC и точка F на стороне AC расположены так, что $BD: DC = 3:2$, $AF : FC = 3:4$. Отрезки AD и BF пересекаются в точке P. Найти отношение $AP : PD$.

Решение:

1 способ



1) Построим DE // BF, тогда $\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{EF} = \frac{2}{3}$,

тогда $CE = \frac{4t \cdot 2}{5} = \frac{8t}{5}$,

$EF = \frac{4t \cdot 3}{5} = \frac{12t}{5}$.

2) $\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{EF} = 3t : \frac{12t}{5} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

2 способ (Т. Менелая)[i]

Рассмотрим ΔADC и секущую BF, пересекающую стороны AC и AD ΔADC в точках F и P соответственно и продолжение стороны CD в точке B.

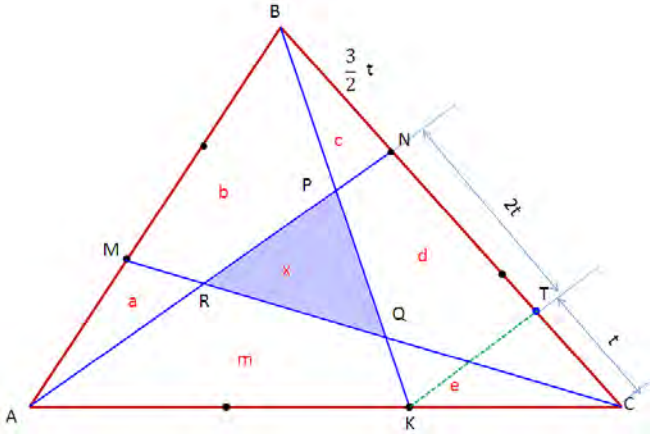
$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$; $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = 1$; $\frac{AP}{PD} = \frac{5}{4}$.

Ответ: 5 : 4.

3.1.4. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC расположены точки M, N, K соответственно так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 1:2$. Отрезки AN, BK, CM пересекают друг друга в точках P, Q, R. Доказать, что площадь треугольника PQR в 7 раз меньше площади треугольника ABC.

Решение:

1 способ



Пусть S_{ABC} = S.

1) AM :MB = BN : NC = CK : KA =1: 2, то AM = $\frac{1}{3}$AB ⇒S_{AMC} = $\frac{1}{3}S$, аналогично S_{KBC} = $\frac{1}{3}S$ и S_{ABN} = $\frac{1}{3}S$, т.е.

2) a + b + c = c + d +e = e + m + a = $\frac{1}{3}S$, а 2a + 2c + 2e + b + d + m = S.

С другой стороны
a + c + e + b + d + m+x = S.

Получили, что x = a + c + e.

3)Построим KT // AN, тогда по теореме Фалеса CT : TN = CK : KA = 1 : 2, тогда если TC = t, TN = 2t, то CT = 3t, а BN = $\frac{3}{2}$ t.

4) $\frac{S_{KTC}}{S_{BCK}} = \frac{TC}{BC}$; $\frac{S_{KTC}}{S} = \frac{2t}{9t} = \frac{2}{9}$, а $S_{KTC} = \frac{2}{27}$ S, тогда S_{BKT} = $\frac{1}{3}S$ - $\frac{2}{27}$ S =$\frac{7}{27}S$.

5) Так как ΔBKT ~ Δ BNP и k = $\frac{7}{3}$, то $\frac{S_{BKT}}{S_{BPN}} = \frac{49}{9}$; S_{BPN} = c = $\frac{7}{27}S \cdot \frac{9}{49} = \frac{1}{21}S$.

Аналогично e = a = c = $\frac{1}{21}S$, а **x =** $\boldsymbol{\frac{3}{21}S = \frac{1}{7}S}$.

2 способ (Т. Менелая)

Пусть S_{ABC} = S.

1) AM :MB = BN : NC = CK : KA =1: 2, то AM = $\frac{1}{3}$AB ⇒S_{AMC} = $\frac{1}{3}S$, аналогично S_{KBC} = $\frac{1}{3}S$ и S_{ABN} = $\frac{1}{3}S$.

2) a + b + c = c + d +e = e + m + a = $\frac{1}{3}S$, а 2a + 2c + 2e + b + d + m = S.

С другой стороны a + c + e + b + d + m+x = S. Получили, что x = a + c + e.

3) Рассмотрим ∆ABK и секущую CM. По теореме Менелая
$\frac{BQ}{QK} \cdot \frac{KC}{CA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$; $\frac{BQ}{QK} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$; $\frac{BQ}{KQ} = 6$. То есть KQ = $\frac{1}{7}$ QK ⇒ S_{KQC} = e = $\frac{1}{7}$ S_{BCK}.

S_{KQC} = e = $\frac{1}{21}$S.

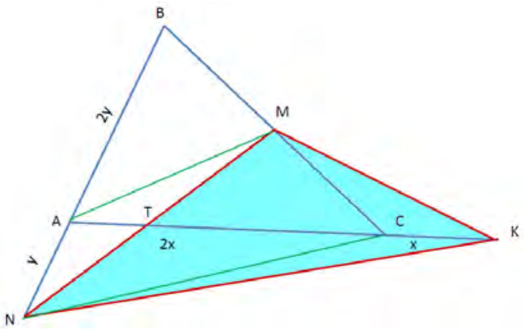
Аналогично a = c = e = $\frac{1}{21}$S.

4) Тогда x = S_{RTP} = a + c + e = $\frac{3}{21}$S = $\frac{1}{7}S$.

Ответ: $\frac{1}{7}S$.

3.1.5. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC, площадь которого равна S, точка M середина стороны BC, точка N на продолжении стороны AB и точка K на продолжении стороны AC выбраны так, что AN =$\frac{1}{2}AB$, CK = $\frac{1}{2}AC$. Найдите площадь треугольника MNK.

Решение:



1)S_{ABC} = S, S_{ANC} = $\frac{1}{2}$ S, так как эти треугольника имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины C на прямую AB, AB : AN = 2 : 1.

Тогда S_{BNC} = S + $\frac{1}{2}$ S = $\frac{3}{2}$ S.

2) ΔNAC и ΔNCK треугольники с общей высотой, проведенной из вершины N к прямой AC, то $\frac{S_{NAC}}{S_{NCK}} = \frac{AC}{CK} = \frac{2x}{x} = 2$,

$\boldsymbol{S_{NCK}} = \frac{1}{2}$ S_{NAC} = $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$**S.**

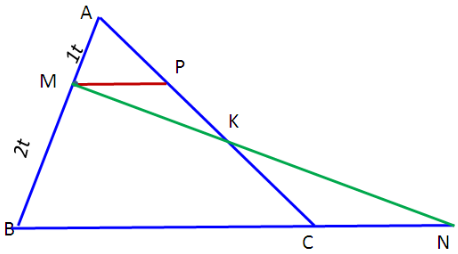
3) Медиана NM делит ΔNBC на равновеликие, следовательно S_{NBM} = $\boldsymbol{S_{NMC}}$ **=** $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ **S**

4) Медиана AM делит площадь ΔABC пополам, то $S_{AMC} = \frac{1}{2}S$, а $S_{MCK} = \frac{1}{2}S_{AMC} = \mathbf{\frac{1}{4}S}$, так как AC:CK =2: 1. 5) $S_{NMK} = S_{NMC} + S_{NCK} + S_{MCK} = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S = \frac{5}{4}S$.

Ответ: $\frac{5}{4}S$.

3.1.6. (ЮФМЛ) В треугольнике ABC точка M на стороне AB расположена так, что $AM : MB = 1 : 2$. Через точку M проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке K и луч BC в точке N. Найти отношение $AK : KC$, если известно, что площади треугольников BMN и ABC равны.

Решение: *1 способ*



1) Пусть $S_{ABC} = S_{BMN} = S$, тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{BA \cdot BC}{BM \cdot BN} = 1$, $\frac{3t \cdot BC}{2t \cdot BN} = 1$, $3 \cdot BC = 2 \cdot BN$ или $\frac{BC}{BN} = \frac{2}{3}$ иначе BN = 3x, BC = 2x, а CN = x.

2) $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$ или AP = y, PC = 2y.

3) ΔABC ~ Δ AMP, $\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC} = \frac{1}{3}$, тогда $MP = \frac{2x}{3}$.

4) ΔNCK ~ Δ AKMP, $\frac{CN}{MP} = \frac{CK}{PK} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$, т.е. $CK = \frac{2y \cdot 3}{5} = \frac{6y}{5}$, $KP = \frac{2y \cdot 2}{5} = \frac{4y}{5}$, тогда $AK = AP + PK = y + \frac{4y}{5} = \frac{9y}{5}$. $AK : CK = \frac{9y}{5} : \frac{6y}{5} = \frac{3}{2}$.

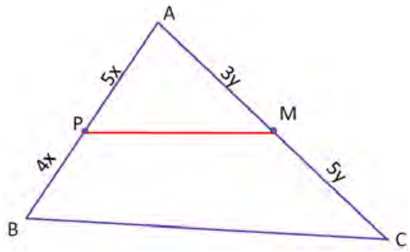
2 способ (Т. Менелая)

1) Пусть $S_{ABC} = S_{BMN} = S$, тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{BA \cdot BC}{BM \cdot BN} = 1$, $\frac{3t \cdot BC}{2t \cdot BN} = 1$, $3 \cdot BC = 2 \cdot BN$ или $\frac{BC}{BN} = \frac{2}{3}$, иначе BN = 3x, BC = 2x, а CN = x.

2) Для ΔABC и секущей MN по теореме Менелая имеем $\frac{АК}{КС} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$; $\frac{АК}{КС} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$; $\frac{АК}{КС} = \frac{3}{2}$.

Ответ: 3 : 2.

3.1.7. Прямая пересекает сторона AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырёхугольника MCBP, если AP : PB = 5 : 4, AM : MC = 3 : 5.



Решение:

1) $S_{APM} = 0{,}5 \cdot 5x \cdot 3y \cdot \sin A = 7{,}5\, xy \sin A$;

2) $S_{APM} = 0{,}5 \cdot 9x \cdot 8y \cdot \sin A = 36\, xy \sin A$;

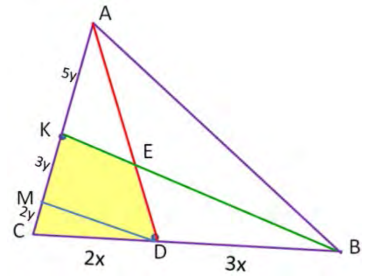
3) $\frac{S_{AMP}}{S_{BPMC}} = \frac{7{,}5xy\sin A}{36xy\sin A - 7{,}7\, xy\sin A} = \frac{75}{285} = \frac{5}{19}$.

Ответ: 5 : 19

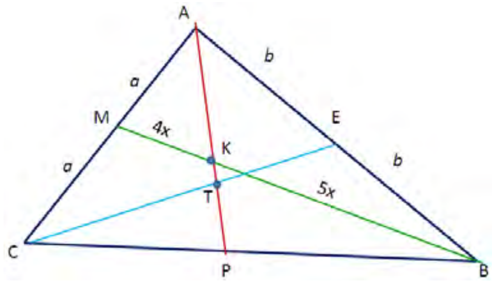
3.1.8. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD : CD = 3 : 2. Найдите площадь чтырёхугольника EDCK.

Решение:

1)$S_{ACD} = \frac{2}{5} S_{ABC} = 16$, а $S_{ABD} = \frac{3}{5} S_{ABC} = 24$.
2) Построим DM// BK, тогда CM : MK = 2 : 3, а AK = CK, то , если CM = 2y, MK = 3y, то AK = 5 y, $S_{AMD} = \frac{8}{10} S_{ADC} = \frac{64}{5}$.
3)$\Delta ADM \sim \Delta AKE$, $S_{AKE} = \frac{25}{64} S_{AMD} = 5$.
4)$S_{CDEK} = S_{ABC} - (S_{ABD} + S_{AKE}) = 40 - (24 + 5) = 11$.
Ответ: 11



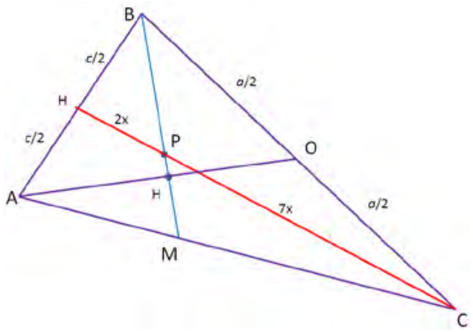
3.1.9. Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины B в отношении 5 : 4, считая от вршины B. В каком отношении, считая от вершины C, эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины C?.



Решение:
1)Так как AK – биссектриса ΔABM , то $\frac{KB}{KM} = \frac{AB}{AM}$;
$\frac{5}{4} = \frac{2b}{a} \Rightarrow a = \frac{8b}{5}$;
2) AP – биссектриса ΔACE, то $\frac{CT}{TE} = \frac{AC}{AE}$; $\frac{CT}{TE} = \frac{2a}{b} = \frac{16b}{5b}. = \frac{16}{5}$,

Ответ: 16 : 5.

3.1.10. Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины C в отношении 7 : 2 , считая от вршины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины A?.

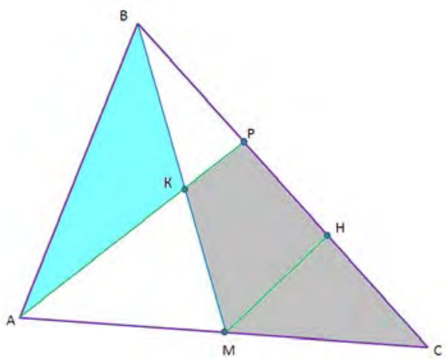


Решение:
1)Так как BP – биссектриса ΔABC, то $\frac{CP}{PH} = \frac{BC}{BH}$;
$\frac{7}{2} = \frac{2a}{c} \Rightarrow c = \frac{4a}{7}$;
2) BP – биссектриса ΔABO, то $\frac{AH}{OH} = \frac{BA}{BC}$; $\frac{AH}{OH} = \frac{4a \cdot 2}{7a} = \frac{8}{7}$.

Ответ: $\frac{8}{7}$.

3.1.11. (Реальный ГИА_2013, B_1301) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника KPCM.

Решение
1)Пусть $S_{FDC} = S$.
Так как BM – медиана ΔABC, а AK – медиана ΔABM, то $S_{ABM} = \frac{1}{2} S$, а $S_{ABK} = S_{AMK} = \frac{1}{4} S$.
2) Построим MH // AP.
Так как CM = MA, то CH = HP и так как BK = KM, то и BP = PH, т.е. $BP = \frac{1}{3} BC$, а следовательно $S_{ABP} = \frac{1}{3} S$.
3) $S_{CMKP} = S_{ABC} - (S_{ABP} + S_{AKB}) = S - (\frac{1}{3} S + \frac{1}{4} S) = \frac{5}{12} S$.

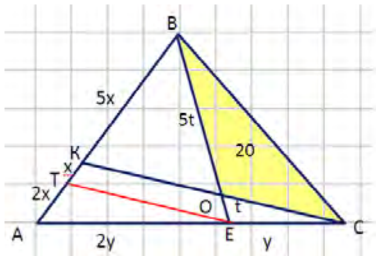


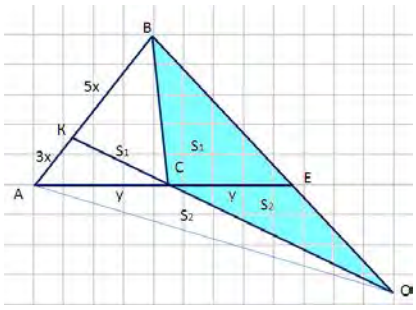
4) $S_{ABK} : S_{CMKP} = \frac{1}{4} S : \frac{5}{12} S = \frac{3}{5}$.
Ответ: $\frac{3}{5}$.

3.1.12. (ТВ№2 от А.Л. 2012 г) В треугольнике ABC на прямой BC выбрана точка К так, что BK:KC=1:2. Точка Е – середина стороны АВ. Прямая СЕ пересекает отрезок АК в точке Р. Найдите площадь треугольника АЕР, если площадь треугольника АВС равна 120.
Ответ: 12 или 20.

3.1.13. (ТВ№5-2012 от А.Л.) В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка К так, что АК : КВ = 3 : 5. На прямой АС взята точка Е так, что АЕ = 2СЕ. Известно, что прямые ВЕ и СК пересекаются в точке О. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ВОС равна 20.

Решение:
1 случай: Точка Е лежит на отрезке АС. Построим ЕТ // СК, тогда ВС : КТ = ВО : ОЕ = 5 : 1. То есть $S_{OEC} = 20 : 5 = 4$, $S_{BEC} = 24$,
$S_{BEA} = 24 \cdot 2 = 48$, $S_{BAC} = 48 + 24 = 72$.





2 случай: Точка Е лежит на продолжении стороны АС.
1) $S_{BCE} = S_{ABC} = S_1$; $S_{OCE} = S_{AOC} = S_2$ как треугольники имеющие общую вершину и равные основания.
Тогда $2(S_1 + S_2) = 40 \Rightarrow S_{ABO} = 40$.
2) $S_{BKO} = \frac{5}{8} S_{ABO} = \frac{5}{8} \cdot 40 = 25 \Rightarrow$
$S_{BKC} = 25 - S_{BCO} = 25 - 20 = 5$.

3) $S_{AKC} = \frac{5}{8} S_{BKC} = \frac{5}{8} \cdot 5 = 3$. Тогда $S_{ABC} = S_{AKC} + S_{BKC} = 5 + 3 = 8$.
Ответ: 8; 72.

3.1.14. (ТВ№36-2013, А. Л.) В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка К так, что АК:КВ=3:5. На прямой АС взята точка Е так, что АЕ=2СЕ. Известно, что прямые ВЕ и СК пересекаются в точке О. Найдите площадь треугольника АВС, если площадь треугольника ВОС равна 20.

Решение:

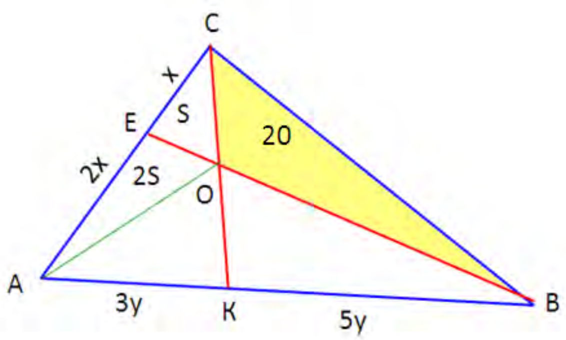


Рис.1

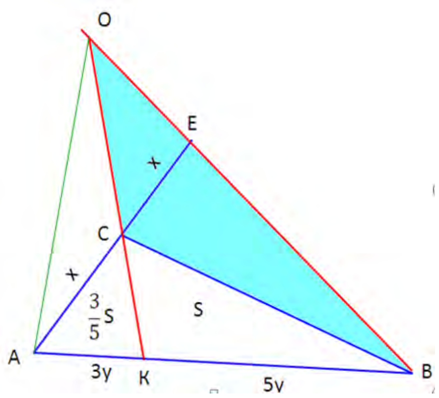


Рис.2

1. Пусть E лежит на стороне AC (Рис.1) и $S_{\Delta EOC} = S$, тогда $S_{\Delta EOA} = 2S$, так как их площади пропорциональны основаниям.

$S_{\Delta EBC} = S + 20 \Rightarrow S_{\Delta EBA} = 2(S + 20) = 2S + 40 \Rightarrow S_{\Delta OBA} = 40 \Rightarrow S_{\Delta OBK} = \frac{5}{8} \cdot 40 = 25$, а $S_{\Delta CBK} = 20 + 25 = 45 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{8}{5} \cdot 45 = 8 \cdot 9 = 72$.

2. Пусть E лежит на продолжении стороны AC, AC = CE (Рис.1) и $S_{\Delta KBC} = S$, тогда $\frac{S+20}{S_{AOK}} = \frac{5}{3}$,

$S_{AOK} = \frac{3}{5}S + 12$, то есть $S_{\Delta OKA} = 12 = S_{\Delta OCE}$, а $S_{\Delta BCE} = 20 - 12 = 8 \Rightarrow$ так как $S_{\Delta BCE} = S_{\Delta BCA}$, то $S_{\Delta ABC} = 8$.

Ответ: 72; 8.

3.1.15. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D, а на стороне AB – точка K, так, что BD : DC = 1 : 2 и BK : KA = 4 : 1. Отрезки AD и CK пересекаются в точке E. Найти отношение площадей треугольников KBD и KDE.

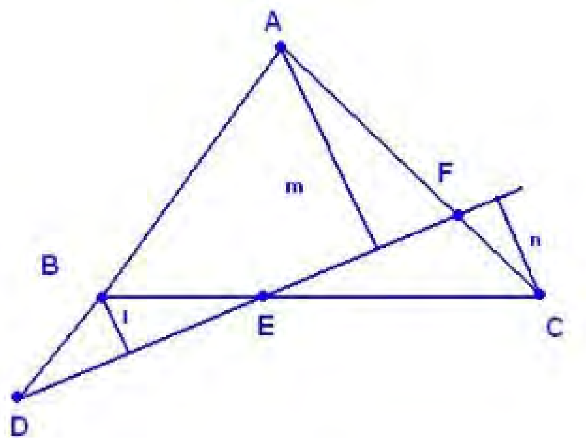
Ответ: 5,5.

---

[i] ***Теорема Менелая***

Теорема Менелая или теорема о полном четырехсторонника известна еще со времен Древней Греции. Название она получила в честь своего автора – древнегреческого математика и астронома **Менелая Александрийского** (примерно 100 г. н.э.). Эта теорема очень красива и проста, но, к сожалению, в современном школьном курсе ей не уделено должного внимания. А, между тем, она во многих случаях помогает очень легко и изящно решать достаточно сложные геометрические задачи.

Теорема 1 (теорема Менелая). Пусть ΔABC пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках F и E, а прямую AB в точке D **(рис. 1)**,



тогда

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$$

Примечание. Чтобы легко запомнить эту формулу, можно воспользоваться следующим правилом: двигаться вдоль контура треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

Доказательство. Из вершин A, B, C треугольника проведем соответственно три параллельные прямые до пересечения с секущей прямой. Получим три пары подобных треугольников (признак подобия по двум углам). Из подобия треугольников вытекают следующие равенства

$$\frac{AF}{FC}=\frac{m}{n}$$

$$\frac{CE}{EB}=\frac{n}{1}$$

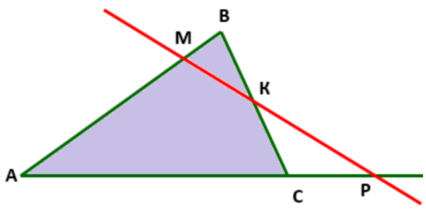
$$\frac{BD}{DA}=\frac{1}{m}$$

А теперь перемножим данные полученные равенства:

Теорема доказана.

Иначе:

Дан ΔABC и прямая MP пересекающая две стороны и продолжение третьей. Тогда по теореме Менелая
$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$; $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$; $\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}=1$.



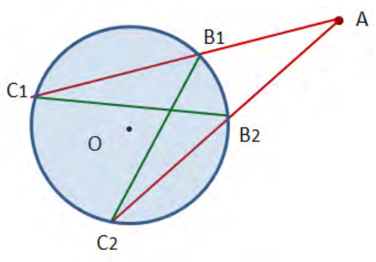
<u>Примечание</u>: «Обход» можно начинать с любой вершины и в любом направлении по сторонам, но двигаться - от вершины до точки пересечения прямой со стороной и от точки до вершины:

A→P →C →K →B →M →A или A→M →B →K →C→P →A

4.1. Окружность.

- *Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается;*
- *Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, заключенной между ними.*
- *Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.*
- *Отрезки касательных прямых к окружности равны.*
- *Пусть через точку А проведена касательная АВ к окружности (В – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в двух точках Р и Q. Тогда $AB^2 = AP \cdot AQ$.*
- *Пусть через точку А проведены секущие к окружности, пересекающие её в точках первая B_1 и C_1, а другая – B_2 и C_2. Тогда $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 1



<u>Доказательство</u>:
$\Delta AC_1B_2 \sim \Delta AC_2B_1$ по двум углам: $\angle AC_1B_2 = \angle AC_2B_1$ как углы, опирающиеся на дугу B_1B_2. $\angle C_1B_1C_2 = \angle C_1B_2C_2$ как углы опирающиеся на дугу C_1C_2, а следовательно равны углы, дополняющие их до 180°, т.е. $\angle AB_2C_1 = \angle AB_1C_2$.

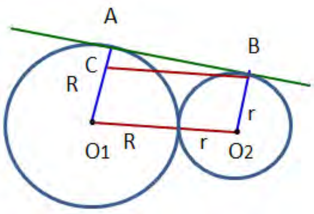
Тогда $\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$ *или*

$$\mathbf{AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2.}$$

<u>Взаимное расположение окружностей:</u>

- *При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.*
- *При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.*
- *Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 2



Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{R \cdot r}$.
<u>Доказательство</u>:
Отрезок $CB = O_1O_2 = R + r$, Отрезок $AC = R - r$, тогда
$AB = \sqrt{CB^2 - AC^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4R \cdot r} = 2\sqrt{R \cdot r}$.
AB =2 $\sqrt{R \cdot r}$.

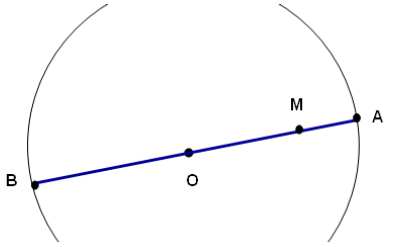
<u>Окружность, касательные, секущие и хорды:</u>

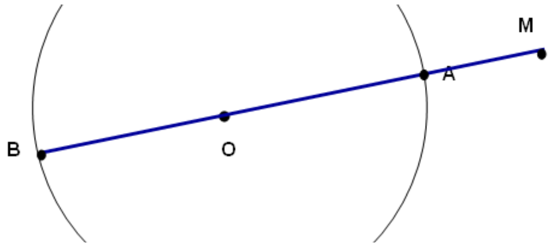
- *Радиус (диаметр), перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.*
- *Пересекающиеся окружности в точках А и В имеют общую хорду АВ.*
- *Общая хорда двух пересекающихся окружностей, перпендикулярна линии центров и делится ею пополам*

ОКРУЖНОСТЬ РЕШЕНИЕ

4.1.1. (2010) Дана окружность и точка *M*. Точки *A* и *B* лежат на окружности, причем *A* – ближайшая к *M* точка окружности, а *B* – наиболее удаленная от *M* точка окружности. Найдите радиус окружности, если *MA* = *a* и *MB* = *b*.

Решение:
1)Пусть М – точка, лежащая внутри окружности, тогда ближайшая к ней точка окружности и наиболее удаленная от неё точки лежат на линии центра, т.е. на диаметре окружности, тогда радиус окружности R = $\dfrac{b+a}{2}$.



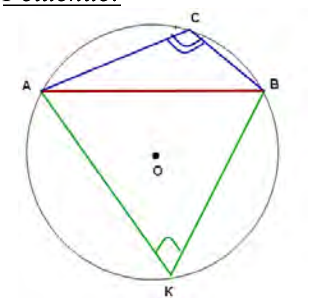


2) Пусть М – точка, лежащая вне окружности, тогда радиус окружности R = $\dfrac{b-a}{2}$

Ответ: $\dfrac{b-a}{2}$ или $\dfrac{b+a}{2}$

4.1.2. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Решение:



По теореме синусов из ΔACB получим: $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R$, отсюда

sin∠ACB = $\dfrac{AB}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ∠ACB = 45°
или ∠ACB = 135°.
Аналогично ∠ACB равен 45° или 135°.
Ответ: 45° или 135°.

4.1.3. Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

*Задача аналогичная задаче про трапецию. (*Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.).
Ответ: 9; 39.

4.1.4. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке *B*. Через точку *B* проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке *A*, а большую – в точке *C*. Известно, что AC = $3\sqrt{2}$. Найдите *BC*.

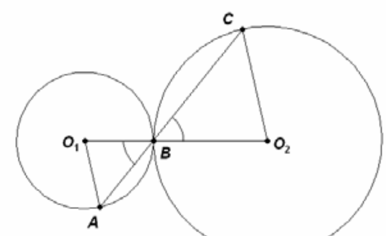


Рис.1

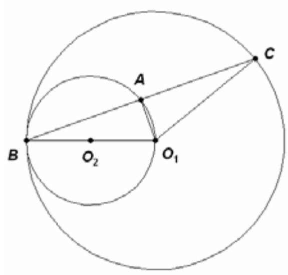


Рис. 2

1 случай, Рис. 1.

$\Delta AO_1B \sim \Delta CO_2B$ по двум углам, тогда BC = 2 AB, или BC = $\frac{1}{3}$ 2AC = 2 $\sqrt{2}$.

2 случай, Рис. 2.

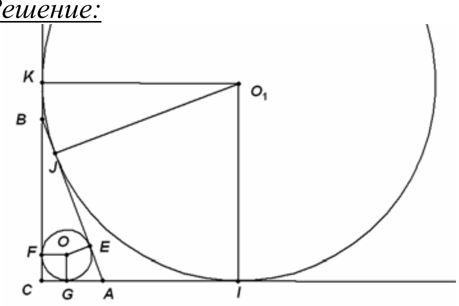
1)$\angle BAO_1 = 90°$, так как BO_1 – диаметр окружности, $\Rightarrow O_1A \perp BC$, $\Rightarrow$ AB = AC, так как ΔBO_1C – равнобедренный, тогда BC = 6 $\sqrt{2}$.

2) По свойству сторон треугольника $BO_1 + O_1C > BC$, то есть, $6\sqrt{2} < 8$. $\sqrt{2} > 1{,}4$ тогда $6\sqrt{2} > 8$. Получили противоречие, задача с таким условием решения не имеет.

Ответ: 2 $\sqrt{2}$; 6 $\sqrt{2}$.

4.1.5. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение:



1 случай. Окружность вписана в прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3, гипотенузой 5. Тогда радиус вписанной в треугольник окружности равен S_{ABC} : p, где p – полупериметр.

$$r = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot CB}{\frac{AC + CB + AB}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1.$$

2 случай: Окружность вневписанная в треугольник. Пусть AJ = AL = x, а JB = BK = 5 – x, тогда CL = 3 + x, CK = 4 + 5 – x, но так как CKO_1K – квадрат, то CL = CK и 3 + x = 4 + 5 – x, 2x = 6, x = 3, CL = O_1L = 6.

Ответ: 1; 6.

4.1.6. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Ответ: 2; 15. (*Задача аналогичная 4.1.5.)*

4.1.7. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и . $R + r < a$ Найдите AB.

Решение:

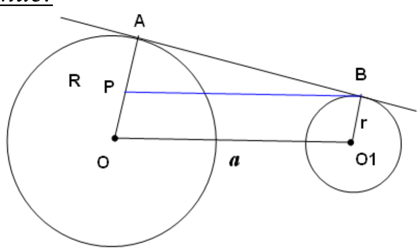


Рис. 1.

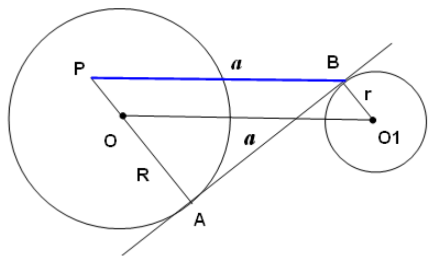


Рис. 2.

1 случай: (Рис. 1) Прямая AB находится по одну сторону от центров O и O_1.

Построим BP || OO_1, PA = R – r, PB = a,

AB = $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$.

2 случай: (Рис. 2) Прямая AB расположена по разные стороны от центров окружностей.

Построим BP || OO_1, PA = R + r, PB = a,

AB = $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$; $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

4.1.8. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов *R* и *r (R > r)* соответственно касаются в точке *A*. Через точку *B*, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке *M*. Найдите *BM*, если известно, что AB = a.

Решение:

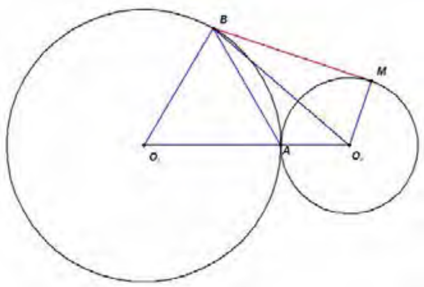


Рис. 1

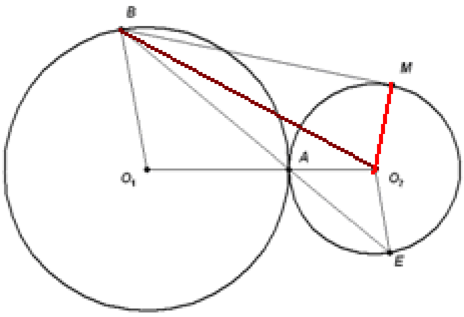


Рис. 2

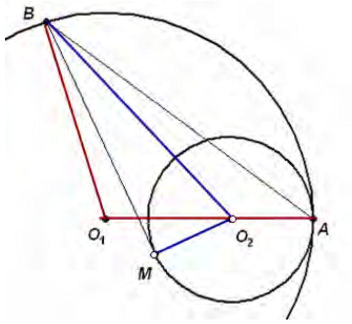


Рис. 3

1.Рис.1

1). Для ΔO_1BA запишем теорему косинусов: $O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2 \cdot O_1A \cdot AB \cdot \cos\angle A$,

$R^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cdot \cos\angle A$, $\quad \cos\angle A = \dfrac{a}{2R}$.

2) $\angle O_2AB = 180° - \angle A$, тогда из ΔO_2BA найдем O_2B: $O_2B^2 = r^2 + a^2 + 2\,r\,a \cdot \dfrac{a}{2R}$.

3) По теореме Пифагора из ΔO_2BM найдем BM: $BM^2 = r^2 + a^2 + 2\,r\,a \cdot \dfrac{a}{2R} - r^2 = .\ a^2 + \dfrac{ra^2}{R}$.

$BM = a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}$.

2. Рис.2. Решение точно такое же, как и по Рис. 1.

3. Рис. 3. 1) Для ΔO_1BA $\cos\angle A = \dfrac{a}{2R}$. 2) из ΔO_2BA имеем $O_2B^2 = r^2 + a^2 - 2\,r\,a \cdot \dfrac{a}{2R}$.

3) По теореме Пифагора из ΔO_2BM найдем BM: $BM^2 = r^2 + a^2 - 2\,r\,a \cdot \dfrac{a}{2R} - r^2 = .\ a^2 - \dfrac{ra^2}{R}$.

$BM = a \cdot \sqrt{1 - \dfrac{r}{R}}$.

Ответ: $a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}$; $\quad a \cdot \sqrt{1 - \dfrac{r}{R}}$.

4.1.9. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром *O*. Хорда *AB* пересекает радиус *OC* в точке *D*, причем $\angle CDA = 120°$ Найдите радиус окружности, вписанной в угол $\angle ADC$ и касающейся дуги *AC*, если OD = $\sqrt{3}$.

Решение:

1) Рис. 1 Окружность, вписанная в угол касается данной внутренним образом. Пусть r – радиус искомой окружности. Так как $\angle ADC = 120°$, то $\angle DO_1K = 30°$, тогда $DK = r \cdot \mathrm{tg}\,30° = r \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Отрезок OD = $\sqrt{3}$, тогда OK = $\sqrt{3} + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, а отрезок $OO_1 = 2 - r$.

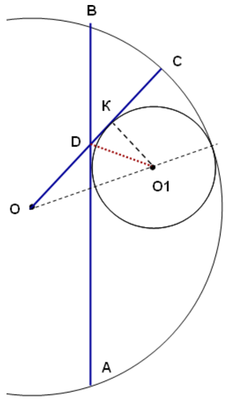


Рис. 1

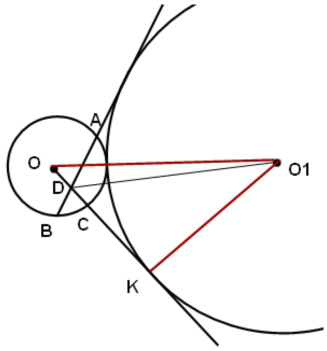


Рис.2

Для ΔOKO_1 запишем теорему Пифагора: $OK^2 + O_1K^2 = OO_1^2$ или $(\sqrt{3} + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + r^2 = (2 - r)^2$.

$3 + 2r + r^2\frac{1}{3} + r^2 = 4 – 4r + r^2$; $\frac{1}{3}r^2 + 6r - 1 = 0$; $r^2 + 18r – 3 = 0$; $D_1 = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Отсюда $r = - 9 + 2\sqrt{21}$.

2) Рис. 2. $DK = r \cdot tg\,30° = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отрезок OD = $\sqrt{3}$, тогда OK = $\sqrt{3} + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$,

а отрезок $OO_1 = 2 + r$.

Для ΔOKO_1 запишем теорему Пифагора: $OK^2 + O_1K^2 = OO_1^2$ или $(\sqrt{3} + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + r^2 = (2 + r)^2$.

$3 + 2r + r^2\frac{1}{3} + r^2 = 4 + 4r + r^2$; $\frac{1}{3}r^2 - 2r - 1 = 0$; $r^2 - 6r – 3 = 0$; $D_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Отсюда $r = 3 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $3 + 2\sqrt{3}$; $- 9 + 2\sqrt{21}$.

4.1.10. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках *A* и *B*. Найдите расстояние между центрами окружностей, если *AB* = 16.

Решение:

1 случай: (Рис. 1) окружности пересекаются внешним образом. $BA \perp O_1O_2$ и точкой К делится пополам, тогда ВК = 8.

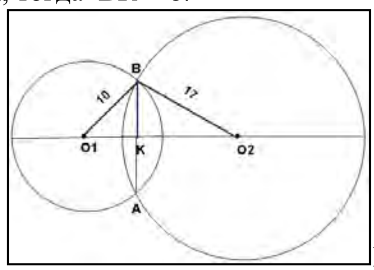


Рис. 1

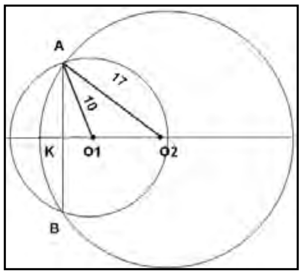


Рис. 2

По теореме Пифагора из ΔO_1BK $O_1K = 6$, из ΔO_2BK $O_2K = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

Тогда $O_1O_2 = O_2K + O_1K = 6 + 15 = 21$.

2 случай: (Рис. 2) Окружности пересекаются внутренним образом.

Тогда $O_1O_2 = O_2K - O_1K = 10 – 6 = 9$.

Ответ: 21 или 9.

4.1.11. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

Решение:

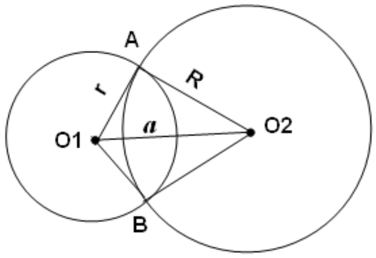


Рис. 1

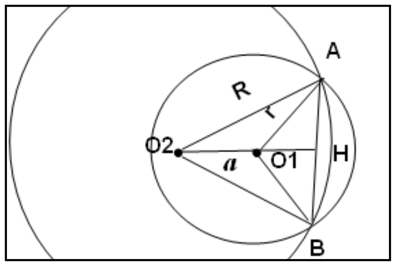


Рис. 2

1 случай.(Рис. 1)

1) Так как $\angle AO_1B = 90°$, то $\angle AO_1O_2 = 45°$; $\angle AO_2B = 60°$, то $\angle AO_2O_1 = 30°$; $\angle O_1AO_2 = 180° - 75°$.

2) Из AO_1O_2 по теореме синусов получим: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{R}{\sin O_1} = \dfrac{r}{\sin O_2}$

R = $\dfrac{a \cdot \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + 30^\circ)} = \dfrac{2a}{1+\sqrt{3}}$; r = $\dfrac{a \cdot \sin 30^\circ}{\sin(45^\circ + 30^\circ)} = \dfrac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

2 случай. (Рис. 2)

1) Так как $\angle AO_1B = 90°$, то $\angle AO_1H = 45°$, а

$\angle AO_1O_2 = 135°$; $\angle AO_2B = 60°$, то $\angle AO_2O_1 = 30°$; $\angle O_1AO_2 = 180° - 165° = 45° - 30°$.

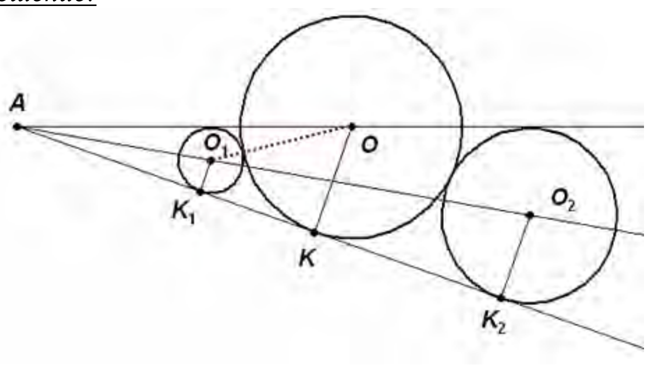
2) Из $\Delta\ O_1AO_2$ по теореме синусов получим: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{R}{\sin O_1} = \dfrac{r}{\sin O_2}$

R = $\dfrac{a \cdot \sin 135^\circ}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = \dfrac{2a}{1-\sqrt{3}}$; r = $\dfrac{a \cdot \sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = \dfrac{a\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{2a}{1+\sqrt{3}}$ и $\dfrac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; $\dfrac{2a}{1-\sqrt{3}}$ и $\dfrac{a\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$.

4.1.12. (2010) Точка *O* – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса *OM* взята точка *A*. Через точку *A* проведена прямая, касающаяся окружности в точке *K*. Известно, что $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол *OAK* и касающейся данной окружности внешним образом.

Решение:



1) $\angle$ OAK = 60°, тогда AK = 2 : tg 60° = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) $KK_1^2 = (2 + r)^2 - (2 - r)^2 = 8r \Rightarrow KK_1 = 2\sqrt{2r}$

3) $AK_1 = r : \text{tg } 30° = \sqrt{3}\,r$,

$KK_1 = AK - AK_1 \Rightarrow KK_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\,r$, тогда

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\,r = 2\sqrt{2r}$.

Решим последнее уравнение и получим: $9r^2 - 36r + 4 = 0$, D = 288, $r_1 = 2 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; $r_2 = 2 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$;

Ответ: 2 - $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2 + $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4.1.13. (2010) Окружности с центрами *O* и *B* радиуса *OB* пересекаются в точке *C*. Радиус *OA* окружности с центром *O* перпендикулярен *OB*, причем точки *A* и *C* лежат по одну сторону от прямой *OB*. Окружность S_1 касается меньших дуг *AB* и *OC* этих окружностей, а также прямой *OA*, а окружность S_2 касается окружности с центром *B*, прямой *OA* и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Решение:

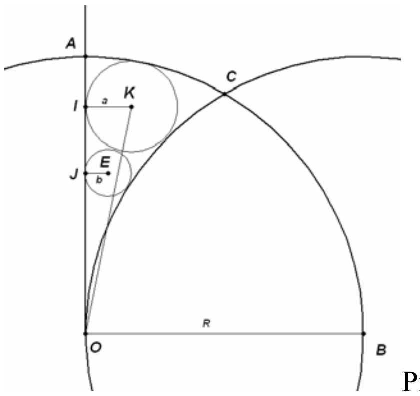


Рис. 1

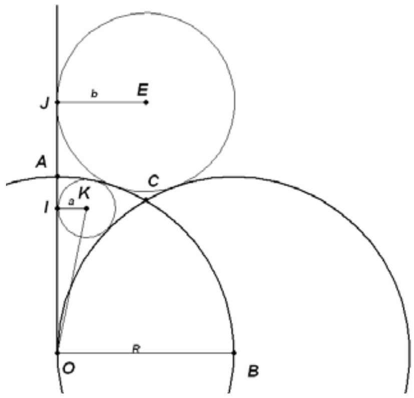


Рис.2

1 случай, Рис. 1.
1) OI – общая касательная к окружностям с центрами в точках B и K, и радиусами R и a соответственно. Тогда OI = 2 $\sqrt{a \cdot R}$, OK = R - a. Из ΔOIK по теореме Пифагора имеем:
$(R – a)^2 = 4aR + a^2$, $R^2 – 2aR + a^2 = 4aR + a^2$, $R = 6a$.
2) OJ – общая касательная к окружностям с центрами в точках B и E, и радиусами R и b соответственно. Тогда OJ = 2 $\sqrt{b \cdot R}$; OJ - общая касательная к окружностям с центрами в точках K и E, и радиусами a и b соответственно, тогда IJ = 2 $\sqrt{b \cdot a}$;
3) OI = IJ + JO, $2\sqrt{a \cdot R} = 2\sqrt{b \cdot R} + 2\sqrt{b \cdot a}$, $a\sqrt{6} = \sqrt{b \cdot a}\,(\sqrt{6} + 1)$. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}$ или

$\frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

2 случай, Рис. 2.
1) JO = OI + IJ, $2\sqrt{b \cdot R} = 2\sqrt{a \cdot R} + 2\sqrt{b \cdot a}$, $\sqrt{b \cdot a}\ \sqrt{6} = a\sqrt{6} + \sqrt{b \cdot a}$, $a\sqrt{6} = \sqrt{b \cdot a}\,(1 - \sqrt{6})$.
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$, $\frac{a}{b} = \frac{7-2\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{7-2\sqrt{6}}{6}$; $\frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

4.1.14. (ДВ) На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята точка D, что AD = 2 и BD = 1. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение:
1) Пусть окружность с центром в точке O касается прямой BC в точке P и пересекает сторону BA в точках A и D. Тогда OP ⊥ BC и OK – серединный перпендикуляр отрезка AD, AK = KD = 1.
2) По теореме о касательной и секущей $BP^2 = BD \cdot BA$, $BP^2 = 1 \cdot 3 = 3$, BP = $\sqrt{3}$.

3) Отрезок ВК = 2, ВЕ = ВК : cos 30° = 2: 0,5$\sqrt{3}$ = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, тогда

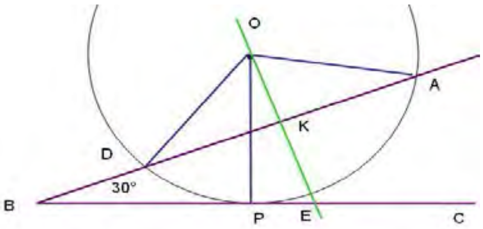


Рис 1

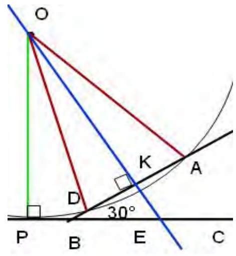


Рис 2

Из рис 1: РЕ = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Из рис 2: РЕ = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

4) ОР ⊥ ВС и ОК ⊥ ВА, тогда ∠АВС = ∠ РОЕ = 30°.
ОР = РЕ : tg ∠ РОЕ = РЕ : tg 30°.

Из рис 1: ОР = $\dfrac{\sqrt{3}}{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$.

Из рис 2: ОР = $\dfrac{7\sqrt{3}}{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 7$.

Ответ: 1 или 7.

4.1.15. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой. Найдите радиус окружности, касающийся каждой из двух данных и той же прямой.
Решение:

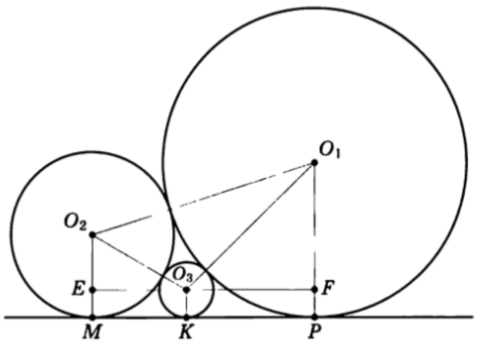


Рис. 2

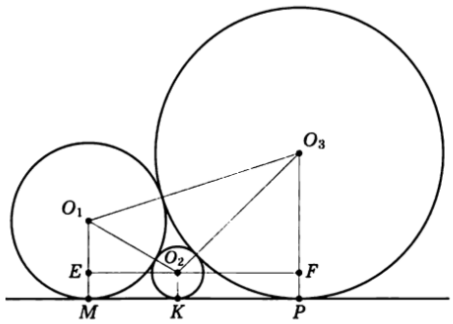


Рис. 3

1 случай: (рис. 2).
Пусть окружности данных радиусов с центрами в точках O_1 и O_2 касаются прямой в точках Р и М соответственно, а искомая окружность с центром в точке O_3 и радиуса ***r*** касается прямой в точке К.

МР = $\sqrt{O_2O_1^2-(O_1P-O_2P)^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$;

МК = $\sqrt{O\ O_2^2-(O_2M-r)^2} = \sqrt{(4+r)^2-(4-r)^2} = 4\sqrt{r}$;

КР = $\sqrt{O_1O_3^2-(O_1P-r)^2} = \sqrt{(9+r)^2-(9-r)^2} = 6\sqrt{r}$

МР = МК + КР; 12 = 10$\sqrt{r}$, r = 1,44.

2 случай: (рис. 3).
Пусть окружности данных радиусов с центрами в точках O_1 и O_2 касаются прямой в точках Р и К соответственно, а искомая окружность с центром в точке O_3 и радиуса ***r*** касается прямой в точке Р.

МК = $\sqrt{O_2O_1^2-(O_1P-O_2P)^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$;

КР = $\sqrt{O\ O_2^2-(O_2M-r)^2} = \sqrt{(4+r)^2-(4-r)^2} = 4\sqrt{r}$;

$MP = \sqrt{O_1O_3^2 - (O_1P - r)^2} = \sqrt{(9+r)^2 - (9-r)^2} = 6\sqrt{r}$

$MK = MP - KP$; $12 = 2\sqrt{r}$, $r = 36$.

Ответ: 1,44; 36.

4.1.16. На стороне AC угла ABC, равного 45°, взятая такая точка D, что CD = AD = 2. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D, и касающейся прямой BC.

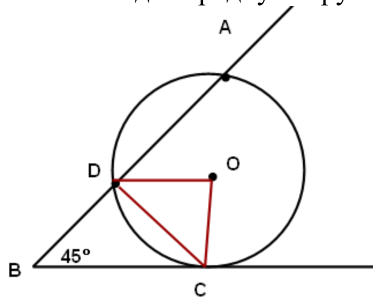


Рис. 1

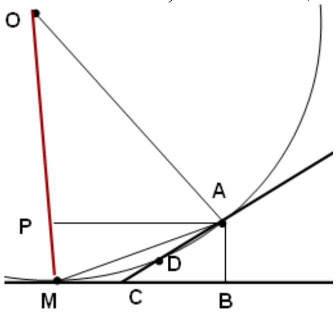


Рис. 2

1 Случай, Рис. 1.

1) По свойству касательной и секущей $CB^2 = AB \cdot DB$; $CB^2 = 2 \cdot 4$, $CB = 2\sqrt{2}$.

2) Из Δ BCD по теореме косинусов $DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos 45°$, $DC^2 = 8 + 4 - 8 = 4$, $DC = 2$;

3) Так как $OC \perp BC$, то $\angle DCO = 45°$, а $\angle DOC = 90°$, тогда $OC = \sqrt{2}$.

2 Случай, Рис. 2.

1) Построим $AB \perp BC$, $\angle ACB = 45°$, $CB = BA = 2\sqrt{2}$.

2) По свойству касательной и секущей $MC = 2\sqrt{2}$;

3) Построим $AP \perp OM$, $MP = AB = 2\sqrt{2}$, $AP = CB + MC = 4\sqrt{2}$, $OP = R - 2\sqrt{2}$.

Для Δ OPA теорема Пифагора имеет вид: $R^2 = 32 + (R - 2\sqrt{2})^2$, $R = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$.

4.1.17. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение:

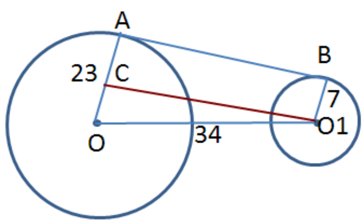


Рис. 1

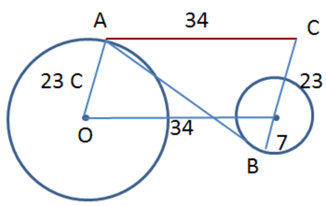


Рис. 2

Рис. 1: $OC = 23 - 7 = 16$, $CO_1 = AB = \sqrt{OO_1^{\,2} - OC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.

Рис. 2: $BC = 23 + 7 = 30$, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 30^2}$

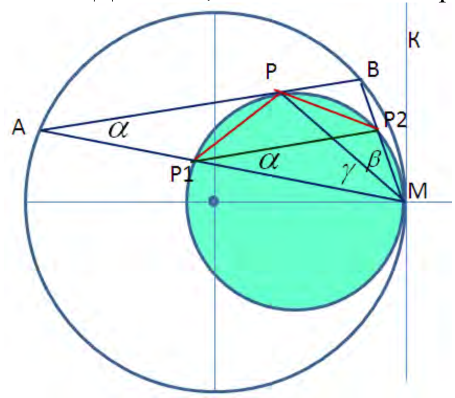
Ответ: 30; $2\sqrt{70}$.

4.1.18 Две окружности касаются друг друга в точке K. Продолжение хорды AB первой окружности касается второй окружности в точке M. Найдите AK, если BK = 12, AM = 24, BM = 18.

Ответ: 16. Указание: это – одна из задач олимпиад в древней Александрии.

Рассмотрите два случая. В каждом из случаев докажем, что КМ – биссектриса угла К треугольника АКВ .

Две окружности касаются внутренним образом в точке М. Хорда АВ касается внутренней окружности в точке Р. Доказать, что МР – биссектриса угла АМВ.



<u>Доказательство:</u>

Построим касательную к окружностям проходящей через общую точку М.

1) $\angle BMK = \angle P_2MK = \alpha$ - как угол между касательной МК и хордой ВМ, дуга $MP_2 = 2\cdot\alpha$

а $\angle P_2P_1M = \angle P_2PM = \frac{1}{2}\cup MP_2 = \alpha$.

2) $\angle PMB = \angle P_2PB = \beta$

3) $\angle MPB = \angle P_2PM + \angle P_2PB = \alpha + \beta$.

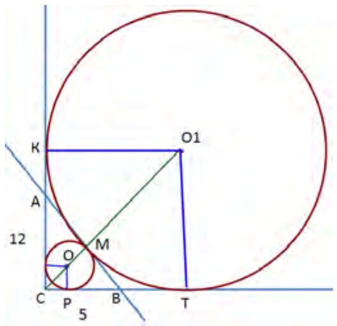
4) $\angle MPB = \alpha + \gamma$ - как внешний угол ΔAPM.

5) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, $\beta = \gamma$, МР – биссектриса угла АМВ.

- *<u>Примечание:</u>* из подобия треугольников, можно доказать, что АР : РВ = АМ : МВ, те МР – биссектриса.

4.1.19. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

<u>Решение</u>:



1) Пусть СВ = 5, АС = 12, тогда по теореме Пифагора АВ = 13.

2) Радиус вписанного в треугольник окружности $CP = \frac{CB+CA-AB}{2} = \frac{5+12-13}{2} = 2$.

3) МВ + МА = АВ = 13. Пусть ВТ = МВ = х, а АМ = АК = 13 – х.

4) По свойству касательных СТ = СК, или СВ + ВТ = СА + АК, 5 + х = 12 + 13 – х, 2х = 20, х = 10.

5) Так как радиус искомой окружности - отрезок O_1T = СТ, то O_1T = 5 + 10 = 15.

Ответ: 2 или 15

4.1.20. В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда АВ = 8 . Точка С лежит на хорде АВ так, что АС : ВС = 1 : 2. Найдите радиус окружности, касающийся данной окружности и касающейся хорды АВ в точке С.

Решение:

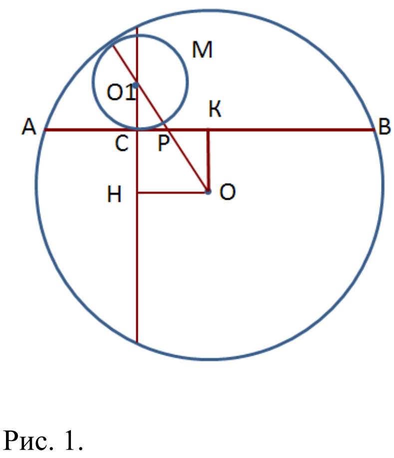


Рис.1

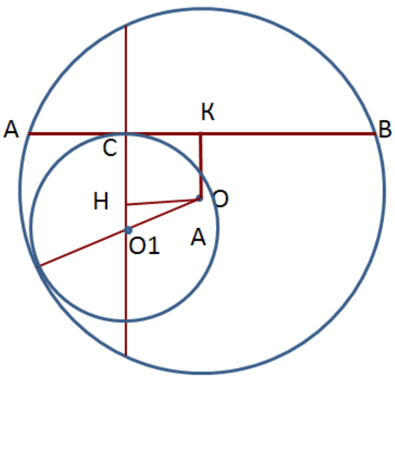


Рис.2

Рис. 1.

1) Построим ОК $\perp$ АВ, тогда по теореме Пифагора ОК = 3. Так как АС : ВС = 1 : 2, то АС = $\frac{8}{3}$, СК = АК – АС = 4 - $\frac{8}{3}$ = $\frac{4}{3}$.
2) Построим СН $\perp O_1C$, где $O_1C \perp$ АВ, тогда ОКСН – прямоугольник, СН = ОК = 3,
ОН = СК = $\frac{4}{3}$.
3) OO_1 = 5 – r, где r - искомый радиус, HO_1 = CH + r = 3 + r, OH = $\frac{4}{3}$, тогда по теореме Пифагора $(5 - r)^2 = (3 + r)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$, $25 - 10r + r^2 = 9 + 6r + r^2 + \frac{16}{9}$, $r = \frac{8}{9}$.
Рис.2.
1) CO_1 = r = искомый радиус, HO_1 = r – CH = r – 3, OH = $\frac{4}{3}$, OO_1 = 5 – r,
$(5 - r)^2 = (r - 3)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$, $25 - 10r + r^2 = 9 - 6r + r^2 + \frac{16}{9}$, $4r = \frac{8 \cdot 16}{9}$, $r = \frac{32}{9}$.
Ответ: $\frac{8}{9}$ или $\frac{32}{9}$.

4.1.22. Две окружности, касающиеся прямой в точках *A* и *B*, пересекаются в точках *C* и *D*, причем *AB* = 8, *CD* = 15. Найдите медиану *CE* треугольника *ABC.*

<u>*Решение:*</u>
1)Пусть прямая CD пересекаем AB в точке M. Тогда по свойству касательной и секущей имеем: MB^2 = MC· MD, MA^2 = MC· MD $\Rightarrow$ MB = MA = 4 $\Rightarrow$ M – середина AB и точка M совпадает с точкой E.
2) Пусть CE = x, тогда

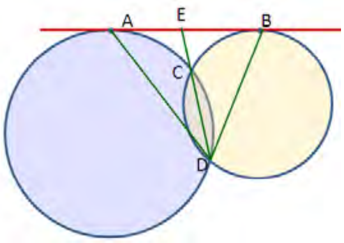


Рис.1

ED = x + 15; x ·(x + 15) = 16;
$x^2 + 15x - 16 = 0$; x = 1, т.е. CE = 1

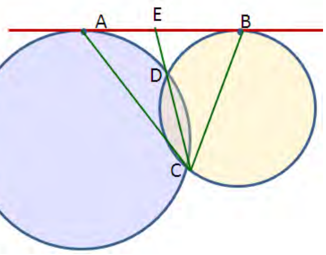


Рис.2

ED = x – 15; x ·(x - 15) = 16;
$x^2 - 15x - 16 = 0$; x = 16, т.е. CE = 16.

Ответ: 1 или 16.

4.1.22. На стороне прямого угла с вершиной *A* взята точка *O*, причем *AO* = 7. С центром в точке *O* проведена окружность *S* радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности *S*.

<u>*Решение:*</u>

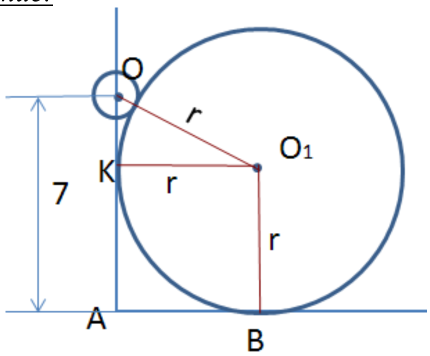


Рис. 1

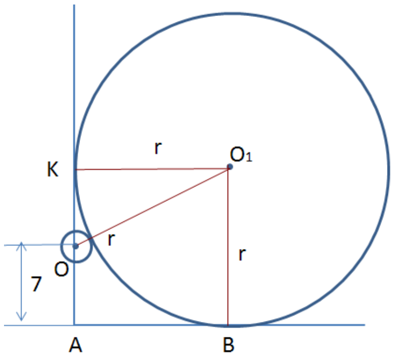


Рис. 2

1 случай: (Рис. 1)
$KO^2 + KO_1^2 = OO_1^2$, $(7 - r)^2 + r^2 = (r + 1)^2$; $r^2 - 16r + 48 = 0$, r = 12, r = 4.
2 случай: (Рис. 2)
$KO^2 + KO_1^2 = OO_1^2$, $(r - 7)^2 + r^2 = (r + 1)^2$; $r^2 - 16r + 48 = 0$, r = 12, r = 4.
Ответ:12; 4.

4.1.23. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Решение:

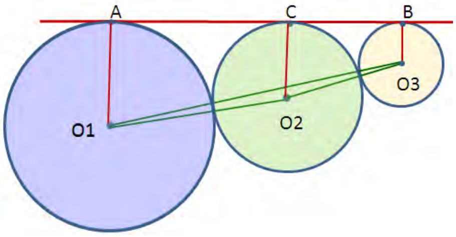


Рис.1

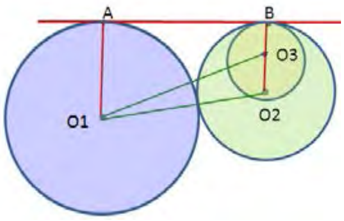


Рис.2

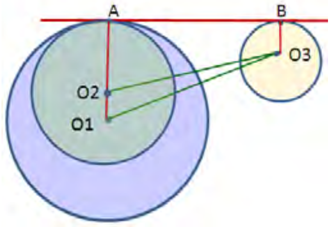
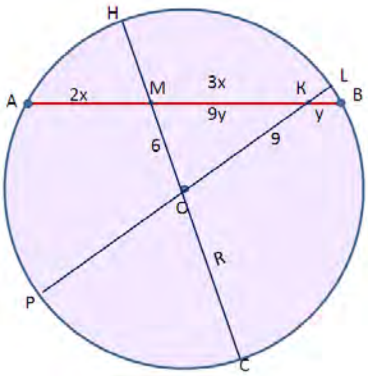


Рис.3

Воспользуемся формулой расстояния между точками касания, если известно расстояние между центрами: пусть $O_1A = R$, $O_3B = r$, $O_1O_3 = d$. $AB = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$.
По условию $O_1A = R = 9$, $O_3B = r = 1$; $O_2C = x$ – искомый радиус; $O_1O_3 = d = 17$,
Рис.1: $O_1O_2 = 9 + x$, $O_3O_2 = 1 + x$.
Тогда $AB = \sqrt{d^2 - (R-r)^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$; $AC = \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}$;
$CB = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$; Тогда $AB = AC + CB$; $8\sqrt{x} = 15$, $x = \frac{225}{64}$.
Рис.2: $AB = 15$ и $AB = \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}$; $6\sqrt{x} = 15$, $x = \frac{25}{4}$.
Рис. 3: $AB = 15$ и $AB = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$; $2\sqrt{x} = 15$, $x = \frac{225}{4}$.
Ответ: $\frac{225}{64}$ или $\frac{25}{4}$ или $\frac{225}{4}$.

4.1.24. (ЮФМЛ) В окружности с центром O на хорде AB расположены точки M и K, так что AM : MK = 2 : 3, MK : KB = 9 : 1. Известно, что OM = 6, OK = 9. Найти радиус окружности.
Решение:



1)MK = 9y или MK = 3x, тогда AM = 2x или AM = 6y, т.е. AB = 6y + 9y + y = 16y, а MB = 9y + y = 10y.

2) $\begin{cases} PK \cdot KL = AK \cdot KB \\ CM \cdot MH = AM \cdot MB \end{cases}$ или

$\begin{cases} (R+9)\cdot(R-9) = 15y \cdot y \\ (R+6)\cdot(R-6) = 6y \cdot 10y \end{cases}$; $\begin{cases} R^2 - 81 = 15y^2 \\ R^2 - 36 = 60y^2 \end{cases}$;

$3R^2 = 288$; $R^2 = 96$; $R = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$.

4.1.25. (ЮФМЛ) Окружность радиуса R касается сторон угла, величина которого равна 2α. Найдите радиусы окружностей, каждая из которых касается заданной окружности и сторон угла.

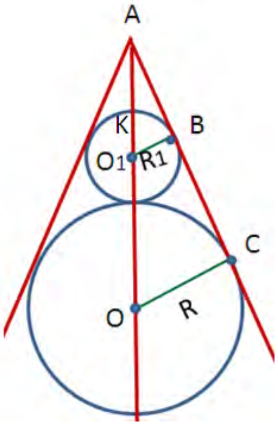


Рис.1

1) $R_1 = AO_1 \cdot \sin\alpha$;

Рис. 1: $AO_1 = AO - R - R_1 = \frac{R}{sin\alpha} - R - R_1$;

$R_1 = \left(\frac{R}{sin\alpha} - R - R_1\right) \cdot \sin\alpha$;

$R_1 = \frac{R(1-sin\alpha)}{1+sin\alpha}$.

Рис. 2: $AO_1 = AO + R + R_1 = \frac{R}{sin\alpha} + R + R_1$;

$R_1 = \left(\frac{R}{sin\alpha} + R + R_1\right) \cdot \sin\alpha$;

$R_1 = \frac{R(1+sin\alpha)}{1-sin\alpha}$.

Ответ: $\frac{R(1-sin\alpha)}{1+sin\alpha}$; $\frac{R(1+sin\alpha)}{1-sin\alpha}$.

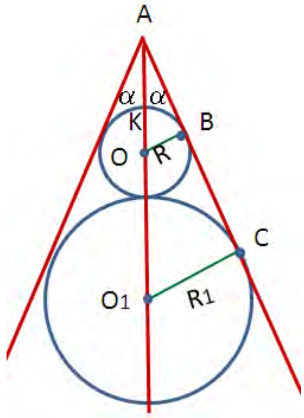


Рис. 2

4.1.26. (ЮФМЛ) Хорды АС и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке К. Известно, что $BC = 2\sqrt{5}$, $CK = 4$, $DK = 22$. Найдите периметр четырёхугольника ABCD.

Решение: $BK = 2$; $2 \cdot 22 = 4 \cdot AK$, $AK = 11$. $AB = \sqrt{121+4} = 5\sqrt{5}$;
$AD = \sqrt{121+484} = 11\sqrt{5}$; $DC = \sqrt{16+484} = 10\sqrt{5}$.
$P = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 11\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$.
Ответ: $28\sqrt{5}$.

4.1.27. (ТВ№6-2013 от А.Л.) В системе координат задана точка *M (x; y),* $x > 0$, $y > 0$. Дана окружность с центром в точке *M* радиуса *r*, причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку O(0;0) и через точку *M*, пересекает окружность в точках *K* и *P*, причем ордината точки *K* меньше, чем ордината точки *P*. Прямая, которая касается окружности в точке *K*, пересекает прямые $x = 0$ и
$y = 0$ в точках *A* и В. Найдите площадь треугольника *BOK* .
Решение:

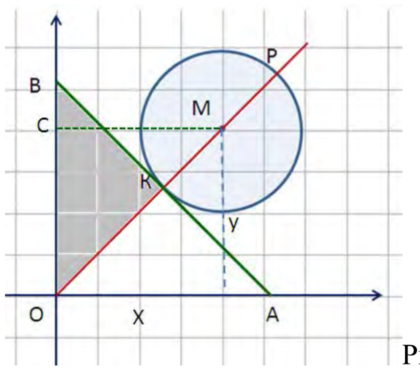


Рис. 1

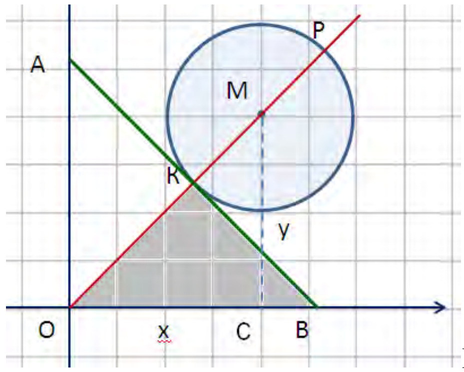


Рис. 2

$OM = \sqrt{x^2+y^2}$, $OK = \sqrt{x^2+y^2} - r$;

Рис. 1:

1) $\Delta OCM \sim \Delta OBK$, $\frac{CM}{CO} = \frac{BK}{KO}$, $\frac{x}{y} = \frac{BK}{\sqrt{x^2+y^2} - r}$ $BK = \frac{x(\sqrt{x^2+y^2} - r)}{y}$;

2) $S_{OKB} = \frac{BK \cdot OK}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2} - r)^2 \cdot x}{2y}$.

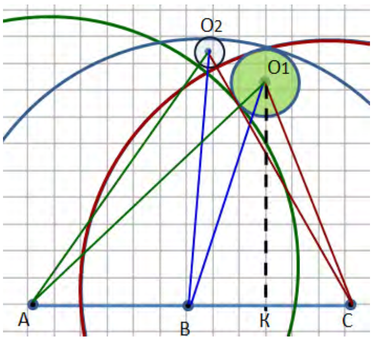
Рис.2:

1) $\Delta OCM \sim \Delta OBK$, $\frac{CM}{CO} = \frac{BK}{KO}$, $\frac{y}{x} = \frac{BK}{\sqrt{x^2+y^2} - r}$ $BK = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2} - r)}{x}$;

2) $S_{OKB} = \frac{BK \cdot OK}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2} - r)^2 \cdot y}{2x}$.

Ответ: $\frac{(\sqrt{x^2+y^2} - r)^2 \cdot x}{2y}$; $\frac{(\sqrt{x^2+y^2} - r)^2 \cdot y}{2x}$.

4.1.28. (ТВ№15-2013 от А.Л.) Точка B – середина отрезка AC, причем AC = 6 . Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.



- *Решение:* Таких окружностей две: с центром в точке O_1 и с центром O_2 и радиусами r_1 и r_2 – соответственно. Так как *при любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой,* то $AO_2 = 5 + r_2$, $BO_2 = 5 - r_2$, $AB = 3$, $CO_2 = 5 + r_2$. ΔAO_2C –равнобедренный, а медиана BO_2 – является высотой, т.е. ΔAO_2B – прямоугольный и по теореме Пифагора имеем равенство: $AO_2^2 = AB^2 + BO_2^2$, $(5 + r_2)^2 = 9 + (5 - r_2)^2$, $r_2 = \frac{9}{20}$.

$BO_1 = CO_1 = 5 - r_1$, т. е. ΔBO_1C – равнобедренный, BK = 1,5 (медиана и высота), AK = 3 +1,5 = 4,5; $AO_1 = 5 + r_1$. Тогда одна и та же высота KO_1 из ΔAO_1K и $\Delta C\,O_1K$ вычисляется: $(5 + r_1)^2 - 4{,}5^2 = (5 -)^2 - 1{,}5^2$, $r_1 = \frac{9}{10}$.

Ответ: $\frac{9}{20}$ *или* $\frac{9}{10}$

4.1.29. (ТВ№16-2013 от А.Ларин.) В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL, PS пересекаются в точке C, хорды KL, MN пересекаются в точке A, хорды MN и PS пересекаются в точке B, причем AL = CK , AM= BN , BS = 5 , BC = 4 . Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна 45 градусов.

<u>*Решение:*</u>
1) Пусть O – центр описанной около ΔABC окружности. Тогда точка O – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и AC. Так как AM = NB, а AL = KC, то серединные перпендикуляры OT и OD – являются серединными перпендикулярами к отрезкам MN и KL, т. е. O – центр искомой окружности.
Построим $OF \perp CB$, тогда FB = FC = 2, так как BC = 4.

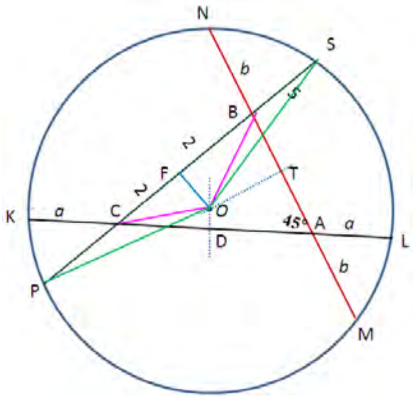


Рис. 1

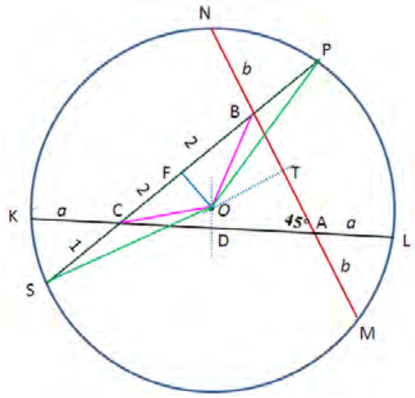


Рис. 2

2)Вписанный $\angle BAC = 45°$, $\cup CB = 90°$, $\angle BOC = 90°$, а $\angle BOF = 45°$, тогда Δ BOF - равнобедренный прямоугольный, OF = BF = 2.
Так как OF - перпендикуляр к хорде PS, то FS = FP
3) (Рис. 1) FS = FP = 2 + 5 = 7. Тогда радиус искомой окружности OS = $\sqrt{OF^2 + FS^2} = \sqrt{53}$.
4) (Рис. 2) FS = FP = 2 + 1 = 3. Тогда радиус искомой окружности OS = $\sqrt{OF^2 + FS^2} = \sqrt{13}$.
Ответ: $\sqrt{53}$; $\sqrt{13}$.

4.1.30. (ТВ№18-2013 от А.Л.) Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую окружность в точках A и B . Найдите радиус первой окружности, если известно, что AB = 12, MB = 6, а радиус второй окружности равен 10.

Решение:
Пусть $R = O_1A = 10$, $OM = r$; Постоим $O_1E \perp AM$, а $OM \perp MA$ как радиус, проведенный в точку касания. $AE = EB = 12 : 2 = 6$; Из ΔEO_1A $O_1A = 8$.

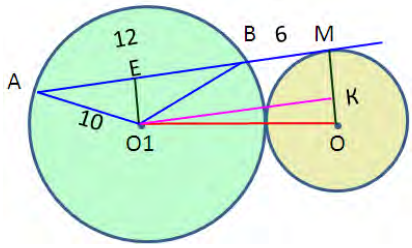


Рис.1

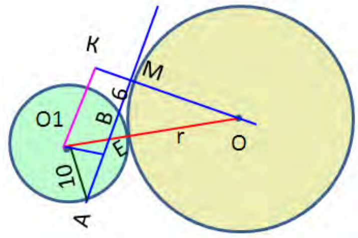


Рис.2

Построим $O_1K // AM$, тогда $O_1K = EM = 6 + 6 = 12$, $MK = O_1E = 8$. $OO_1 = R + r = 10 + r$.
Рис.1: $OK = r - 8$, по теореме Пифагора: $OO_1^2 = OK^2 + O_1K^2$; $(10 + r)^2 = 12^2 + (r - 8)^2$;
$(10 + r)^2 - (r - 8)^2 = 12^2$; $(10 + r - r + 8)(10 + r + r - 8) = 12^2$; $r = 3$.
Рис 2: $OK = r + 8$, по теореме Пифагора: $OO_1^2 = OK^2 + O_1K^2$; $(10 + r)^2 = 12^2 + (r + 8)^2$;
$(10 + r)^2 - (r + 8)^2 = 12^2$; $(10 + r - r - 8)(10 + r + r + 8) = 12^2$; $r = 27$.
Ответ: 3; 27.

4.1.31. (ТВ№33-2013, А. Л.) Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B - точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

Решение:
Рис.1: $OO_1 = 3 + 8 = 11$; $OA^2 = 121 - 9 = 112$; $O_1K = x$, $KO = 11 - x$; $9 - x^2 = 112 - (11 - x)^2$;
$9 - x^2 = 112 - 121 + 22x - x^2$; $x = \frac{9}{11}$; $AB = 2AK = \sqrt{9 - \frac{81}{121}} = \frac{24\sqrt{7}}{11}$.

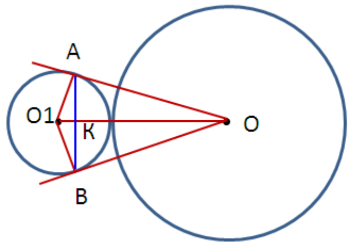


Рис.1

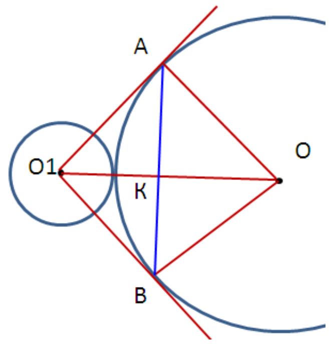


Рис.2

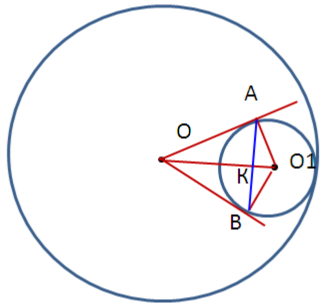


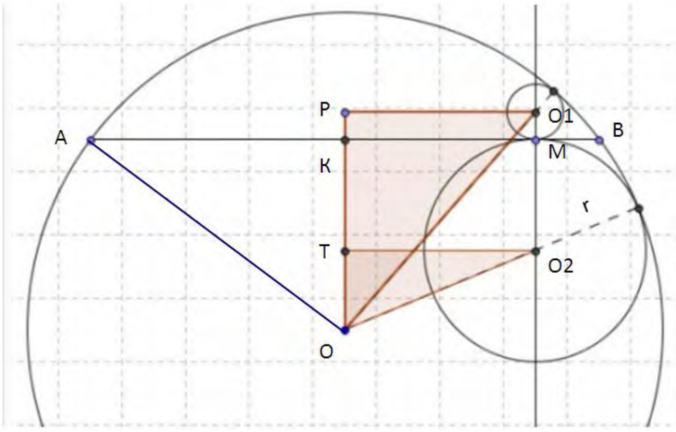
Рис.3

Рис.2: $OO_1 = 3 + 8 = 11$; $O_1A^2 = 121 - 64 = 57$; $OK = x$, $KO_1 = 11 - x$; $64 - x^2 = 57 - (11 - x)^2$; $x = \frac{64}{11}$
$AB = 2AK = \sqrt{64 - \frac{64^2}{121}} = \frac{16\sqrt{57}}{11}$.
Рис.3: $OO_1 = 8 - 3 = 5$; $OA^2 = 25 - 9 = 16$; $O_1K = x$, $KO = 5 - x$; $9 - x^2 = 16 - (5 - x)^2$;
$9 - x^2 = 16 - 25 + 10x - x^2$; $x = \frac{9}{5}$; $AB = 2AK = 2\sqrt{9 - \frac{81}{25}} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{5} = 4{,}8$.
Ответ: 4,8 или $\frac{24\sqrt{7}}{11}$ или $\frac{16\sqrt{57}}{11}$.

4.1.32. (ТВ№34-2013, А. Л.) Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM = 28$, $MB = 4$, а радиус большей окружности равен 20.

Решение:

1 случай: Рассмотрим окружность с центром в точке O_1: $OO_1 = 20 - r$, $AB = 28 + 4 = 32 \Rightarrow$
$KM = O_1H = 32 : 2 - 4 = 12$;
$OK = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$; Для ΔOPO_1 имеем
$(20 - r)^2 = 12^2 + (12 + r)^2$; $64r = 112$; $r = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}$. *2 случай*: Рассмотрим окружность с центром в точке O_2: $OO_2 = 20 - r$, $O_2T = 16 - 4 = 12$;
$OT = 12 - r$; Для ΔOTO_2 имеем
$(20 - r)^2 = 12^2 + (12 - r)^2$; $16r = 112$; $r = 7$.
Ответ: 7; $\frac{7}{4}$.



4.1. 33. (ЕГЭ 2013 Сибирь) Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 – параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

Решение:

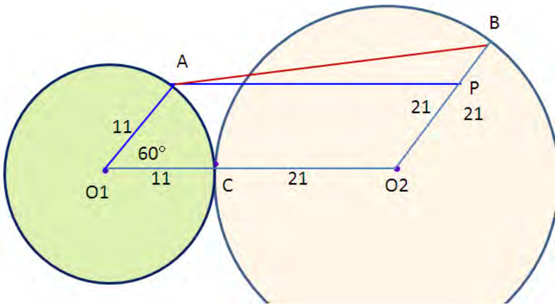


Рис. 1

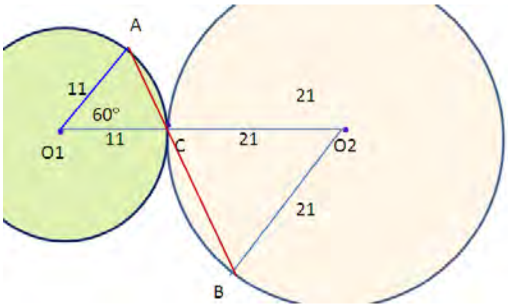


Рис. 2

Рис.1: $AP = 21 + 11 = 32$; $PB = 21 - 11 = 10$;

$AB = \sqrt{AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot PB \cdot cos120°} = \sqrt{32^2 + 10^2 + 2 \cdot 32 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{1444} = 38$.

Рис.2: Так как $O_1A \parallel O_2B$, то $\angle AO_1C = \angle BO_2C = 60°$, тогда ΔAO_1C и ΔBO_2C равносторонние и $AB \cap O_1O_2 = C$, т.е. $AB = 21 + 11 = 32$.
Ответ: 32; 38.

4.1.34. . (ЕГЭ Урал) Окружности радиусов 2 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке L. Прямая, проходящая через точку L вторично пересекает меньшую окружность в точке К, а большую – в точке М. Найдите площадь треугольника KMO_1, если $\angle LMO_2 = 15.°$

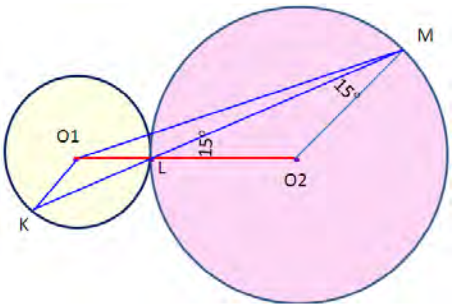


Рис.1

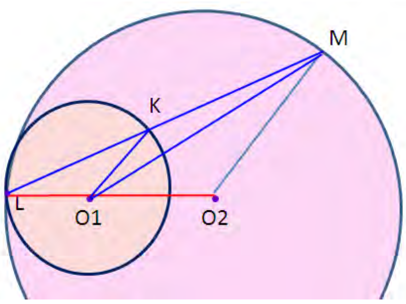


Рис.2

Решение: Рис. 1: $LM^2 = 162 + 162 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 81(2 + \sqrt{3})$; $LM = 9 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $KL = 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$;

$KM = 11 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $S = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = 5{,}5$.

Рис.2: KM = LM – LK = $7 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$; S = $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ = 3,5.

Ответ: 5,5; 3,5.

4.1.35. (ЕГЭ Восток) Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K. MO_1 и NO_2 – параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle MO_1O_2 = 120.°$. Найдите MN.

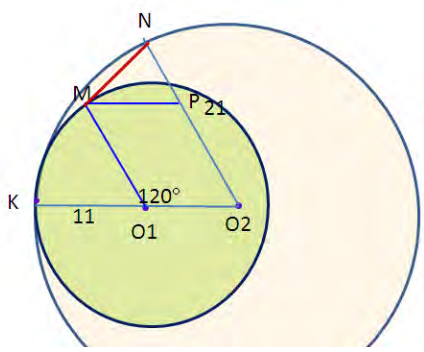


Рис. 1

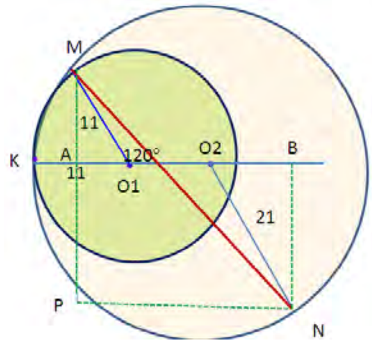


Рис. 2

Рис.1: MP = 21 - 11 = 10; NP = 21 – 11 = 10; $\angle MPN = 180° - 120° = 60° \Rightarrow \Delta MNP$ – равносторонний, MN = 10.

Рис.2: $\angle MO_1A = 60° \Rightarrow$ $AO_1 = 5{,}5$; MA = $\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $O_2B = 10{,}5$; NB = $\frac{21\sqrt{3}}{2}$.

Тогда AB = PN = 5,5 + (21 – 11) + 10,5 = 16 + 10 = 26; MP = MA + AP = MA + ND = $\frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{21\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$;

MN = $\sqrt{PM^2 + PN^2} = \sqrt{26^2 + (16\sqrt{3})^2} = \sqrt{676 + 768} = \sqrt{676 + 768} = 38$.

Ответ: 10; 38.

4.1.36. (ЕГЭ Центр) Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30.°$

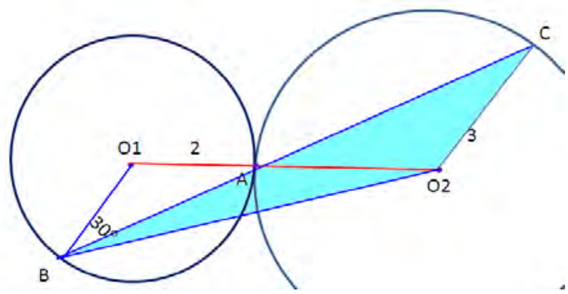


Рис.1

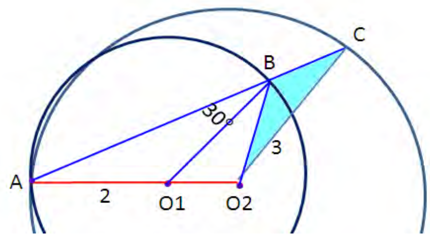


Рис.2

Решение: Рис. 1: $AB^2 = 4 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12$; AB = $2 \cdot \sqrt{3}$; $AC^2 = 9 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 27$; AC = $3 \cdot \sqrt{3}$

BC = $5 \cdot \sqrt{3}$; S = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

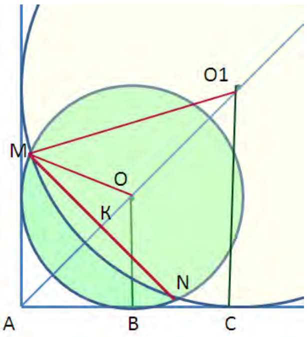
Рис.2: BC = AC – AB = $\sqrt{3}$; S = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{4}$; $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4.1.37. Досрочный 24.04.2013

Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

Решение:
2 способ:



1 случай: Пусть $O_1C = 6\sqrt{2}$, тогда $AC = 6\sqrt{2}$, $AO_1 = 12$, $AO = 12 - 8 = 4$, а $OB = AB = OM = 2\sqrt{2}$.

Пусть $OK = x$, тогда $OM^2 - x^2 = MO_1^2 - O_1K^2$ или $8 - x^2 = 72 - 64 - 16x - x^2$;

$16x = 0 \Rightarrow O_1K = 8$, $MN = 2\sqrt{72-64} = 4\sqrt{2}$.

2 случай: Пусть $OB = 6\sqrt{2}$, тогда $AB = 6\sqrt{2}$, $AO = 12$, $AO_1 = 12 + 8 = 20$, а

$O_1C = AC = O_1M = 10\sqrt{2}$.

Пусть $OK = x$, тогда $OM^2 - x^2 = MO_1^2 - O_1K^2$ или $72 - x^2 = 200 - 64 - 16x - x^2$;

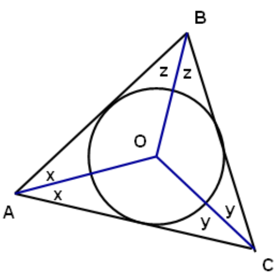
$16x = 64 \Rightarrow x = 4$; $OK = 4$, $MN = 2\sqrt{72-16} = 4\sqrt{14}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{14}$.

4.2. Окружность и треугольник на ОГЭ

1. *Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис*
2. *Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.*
3. *Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной окружности.*

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 3

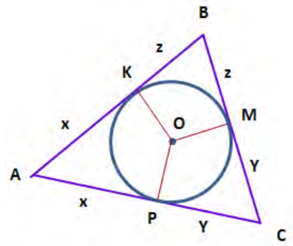


Если O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то выполняются равенства:

$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°$; $\angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90°$; $\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90°$;

$x + y + z = 90°$, $x + y = 90° - z$, $\angle AOC = 180° - (x + y) = 180° - 90° + z = z + 90°$, $\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°$;

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 4



Пусть О – центр окружности, вписанной в треугольник АВС.

$P_{ABC} = 2x + 2y + 2z$, $z = \frac{P_{ABC} - 2(x+y)}{2} = \frac{AB+BC+AC-2\,AC}{2} = \frac{AB+BC-AC}{2}$.

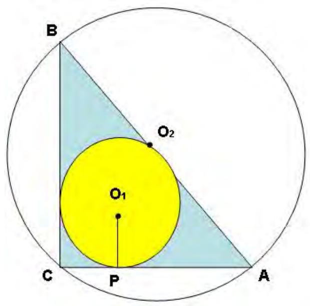
То есть, получим формулы для вычисления **расстояния от вершины треугольника до точки касания**:

$$BK = BM = \frac{AB+BC-AC}{2};\quad CP = CM = \frac{BC+AC-AB}{2};$$

$$AK = AP = \frac{AB+AC-BC}{2}$$

4.2.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2м и 5м.

Решение:



$S = 0{,}5\, a \cdot b$; $C = 10$, $CP = PO_1 = 2$.

Пусть CA = 2 + x, CB =, тогда

$AB = x + y = 10$. $(2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 100$.

$4 + 4x + x^2 + 4 + 4y + y^2 = 100$;

$x^2 + y^2 = 52$; $100 – 20x + x^2 + x^2 = 52$;

$2x^2 - 20x + 48 = 0$; $x^2 - 10x + 24 = 0$;

$X_1 = 6$; $x_2 = 4$, тогда $y = 6$ или $y = 4$.

$AC = a = 8$, $CB = b = 6$,

$S = 0{,}5\, a \cdot b = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 6 = 24$

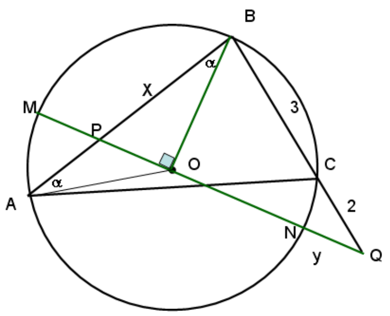
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) Свойство описанной окружности;
2) радиус вписанной окружности;
3) Свойства касательных;
4) теорема Пифагора;
5) площадь треугольника;

Ответ: 24 (Демовариант_02).

4.2.2. Противолежащая основанию вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 6 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.
Ответ: $\frac{5}{4}$.

4.2.3. Через центр О окружности, описанной около остроугольного треугольника АВС, проведена прямая, перпендикулярная ВО и пересекающая отрезок АВ в точке Р и продолжение отрезка ВС в точке Q так, что точка С лежит между точками В и Q. Вычислить длину отрезка ВР, если АВ = 4 см, ВС = 3см, В Q = 5 см.

Решение:



1) По свойству касательных $QC \cdot QB = QM \cdot QN$ или $y(2R + y) = 10$;

Из ΔOBQ, по теореме Пифагора $R^2 + (R + y)^2 = 25$, тогда

$R = \sqrt{\frac{15}{2}}$.

2) Из ΔOBP имеем $\cos\alpha = \frac{R}{x}$, $x = \frac{R}{\cos\alpha}$.

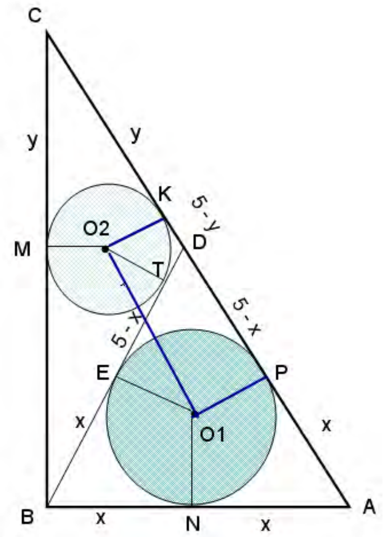
3) Из ΔAOB по теореме косинусов имеем: $R^2 = R^2 + 16 - 8R\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{2}{R}$, тогда

$x = \frac{R^2}{2} = \frac{15}{4}$.

Ответ: 3,75.

4.2.4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 6, а длина катета BC равна 8. Точка D делит гипотенузу AC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ABD и в треугольник BCD.

Решение:

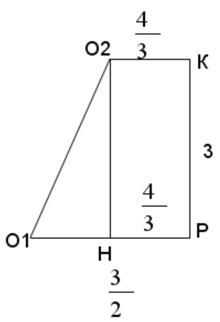


1) По теореме Пифагора AC = 10. Так как точка D делит гипотенузу AC пополам, то D – центр описанной около ΔABC окружности, тогда R = AD = CD = BD = 5.
2) По свойству касательных, проведенных к окружности AP = AN = x, тогда PD = DE = 5 – x, а BE = BN = x.
Получили, что 2x = AB = 6, x = 3, а PD = 2.
3) Аналогично CK = CM = y, KD =DT = 5 – y, а BT = BM = y, то есть 2y = 8, y = 4, а KD = 1.
KP = KD + PD = 2 + 1 = 3.
4) Найдем радиусы r_1 и r_2 вписанных окружностей по формуле $r = \dfrac{2S}{P}$, где P – периметр треугольника:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Так как BD – медиана, то $S_{ABD} = S_{DBC} = 12$. $P_{ABD} = 5 + 5 + 6 = 16$, $P_{BDC} = 5 + 5 + 8 = 18$.

$r_1 = 24 : 16 = 1{,}5$; $r_2 = 24 : 18 = \dfrac{4}{3}$.

5) Рассмотрим трапецию PO_1O_2K:



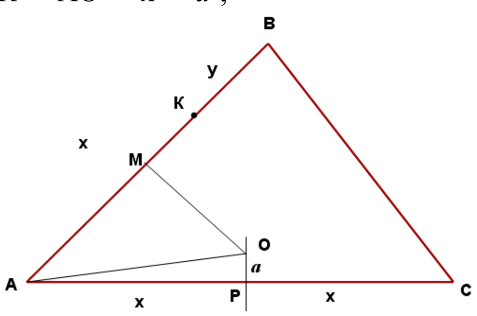
$PH = \dfrac{4}{3}$, тогда $O_1H = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{6}$. По теореме Пифагора из ΔO_1O_2H найдем

O_1O_2: $O_1O_2 = \sqrt{O_1H^2 + O_2H^2} = \sqrt{9 + \dfrac{1}{36}} = \sqrt{\dfrac{335}{36}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{13}}{6}$.

4.2.5. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На стороне AB взята точка K так, что $AK = \dfrac{1}{2}AC$. Найти BK, если расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до стороны AC равно *a*.

Решение:
1) Пусть AK = x, а KB = y, OM и OP - серединные перпендикуляры, тогда AO = R - радиус описанной окружности;
2) $R^2 = AO^2 = x^2 + a^2$;



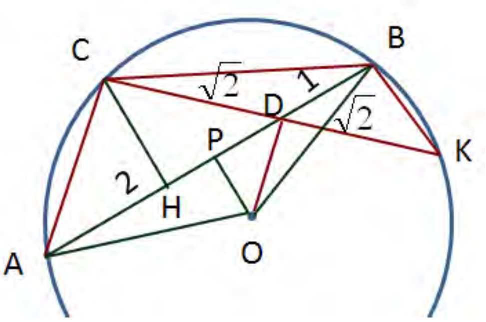
3) Из ΔABC по теореме косинусов
$BC^2 = (x + y)^2 + 4x^2 - 2x(x + y)$
$BC^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 - 2x^2 - 2xy$,
$BC^2 = y^2 + 3x^2$;
4) По теореме синусов BC = 2 R sin 60° или
$BC^2 = 3R^2$,
5) Получим равенство $3R^2 = y^2 + 3x^2$ или
$3(x^2 + a^2) = y^2 + 3x^2$, $3a^2 = y^2$,
$y = a\sqrt{3}$.

Ответ: $a\sqrt{3}$.

4.2.6. Хорда *AB* стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка *C* лежит на этой дуге, а точка *D* лежит на хорде *AB*. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника *ABC*.

Решение:

1) Так как дуга AB = 120°, то ∠AOC = 120°, а в равнобедренном ΔAOB ∠ABO = ∠BAO = (180°- 120°) : 2 = 30°, высота OP является медианой и делит AB на равные отрезки: AP = PB = 3 : 2 = 1,5, а радиус $AO = \frac{AP}{cos30^{\circ}} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$.



2)ΔACD ~ ΔBK по двум углам: ∠CDA =∠BDK – вертикальные, ∠CAD = ∠CKB – как углы опирающиеся на одну дугу CB, тогда $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DK}$; $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2}{DK}$,
$DK = \sqrt{2}$.

3) ΔOCK – равнобедренный, тогда медиана OD является высотой: $OD = \sqrt{OK^2 - DK^2} = 1$. То есть ΔODB – равнобедренный, ∠OBD = ∠ DOB = 30°, а ∠ ODB = 120°, тогда∠ CDH =∠ BDK = 120° - 90° = 30°.

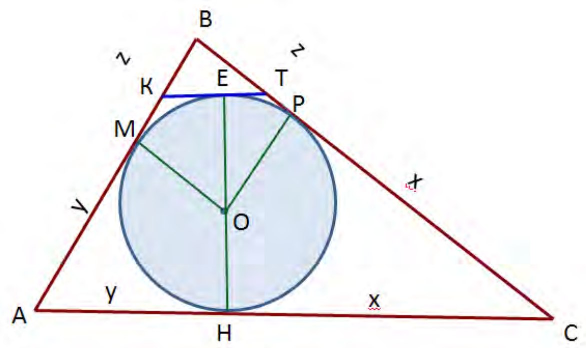
4) Из ΔCDH имеем: $CH = CD \cdot \sin 30° = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

4.2. 7. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

Решение:

1) По свойству касательных AH = AM = y,
CH = CP = x, BP = BM = z.
Тогда 2x + 2y + 2z = 18, x + y + z = 9.
2) MK = KE, TP = TE, тогда MK + TP = KT = 2.
2 z = MB + BP = MK + KB + BT + TP,
2 z = 2 + KB + BT.
3) ΔABC ~ ΔBTK, тогда $\frac{AC}{KT} = \frac{AB}{KB} = \frac{CB}{PB}$.
$\frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{KB}$, $KB = \frac{2(z+y)}{x+y}$, $\frac{x+y}{2} = \frac{x+z}{TB}$, $TB = \frac{2(z+x)}{x+y}$



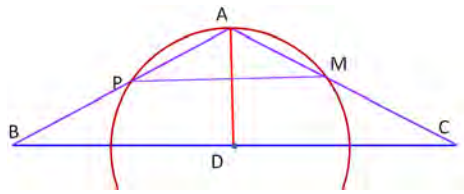
4) $2z = 2 + \frac{2(z+y)}{x+y} + \frac{2(z+x)}{x+y}$, $z = \frac{x+y+ z+y+ z+x}{x+y} = \frac{18}{x+y}$, тогда получим уравнение:
$x + y + \frac{18}{x+y} = 9$, $(x+y)^2 - 9(x+y) + 18 = 0$; $x+ y = 3$ или $x+ y = 6$.
Так как x+y = AC, то AC = 3 или AC = 6.
Ответ: 3 или 6.

4.2.8. (ЮФМЛ) В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен 1, расстояние от её центра до вершины C равно $\sqrt{5}$, а сумма сторон AC и BC равна 8. Найдите площадь треугольника.

Решение: P = 12; S = p ·r = 6.

- Ответ: 6

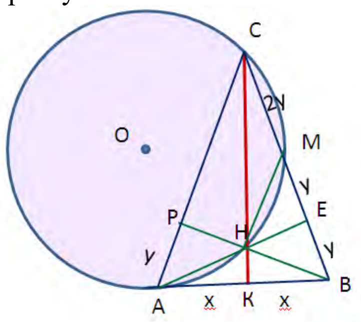
4.2.9. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2014г) Точка D является основанием высоты, проведённой из вершины тупого угла A треугольника ABC к стороне BC. Окружность с центром в точке D и радиусом DA пересекает прямые AB и AC в точках P и M, отлтчных от A, соответственно. Найдите AC, если AB = 4, AP = 2, AM = 2.



Решение:
1)Так как AP = AM = 2, то дуги AP и AM равны, а следовательно и PDA и ADM, а также углы DAP и DAC – равны. Тогда AD – биссектриса и медиана и высота равнобедренного треугольника PMA.
2) Если AD⊥PM и AD ⊥BC, то PM // BC и по теореме Фалеса AM = MC = 2, а AC = 4.
Ответ: 4

4.2.10. (ЮФМЛ) Известно, что в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C, середина стороны BC и точка пересечения высот расположены на одной окружности. Найти косинусы углов треугольника ABC.

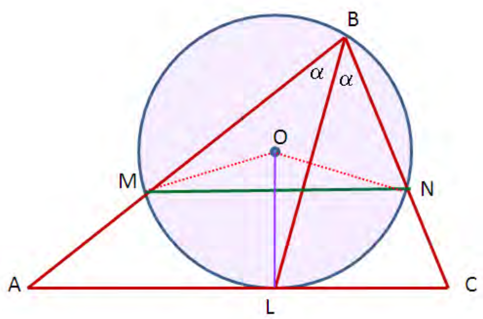
Решение:
Рассуждения. Так как следует найти косинусы углов, то нужно выразить одну сторону треугольника через другую, минуя углы.
1) CK – высота равнобедренного треугольника ⇒ медиана и биссектриса, тогда AK = KB = x;
2)AH = HM – хорды, стягивающие равные дуги и AH = HB – т.к. CK – серединный перпендикуляр к отрезку AB.



3)HE ⊥ MB ⇒ HE – медиана, т.е. BE = EM = y. Так как M - середина BC, то CM = 2y, а CB = Ac = 4y;
4) Из ΔCBK $CK = \sqrt{CB^2 - BK^2} = \sqrt{16y^2 - x^2}$;
Из ΔABP $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{4x^2 - y^2}$;
5)$AB \cdot CK = AC \cdot BP$; $2x \cdot \sqrt{16y^2 - x^2} = 4y \cdot \sqrt{4x^2 - y^2}$;
$4x^2(16y^2 - x^2) = 16y^2(4x^2 - y^2)$; $64x^2y^2 - 4x^4 = 64x^2y^2 - 16y^4$;
$x = \sqrt{2}\,y$;
5)$\cos\angle B = \cos\angle A = \frac{\sqrt{2}y}{4y} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cos\angle C = \frac{32y^2 - 8y^2}{32y^2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3}{4}$.

4.2.11. (ЮФМЛ)В треугольнике ABC проведена биссектриса BL и построена окружность, которая проходит через точки B и L, касается стороны AC и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Доказать, что отрезок MN всегда параллелен AC.



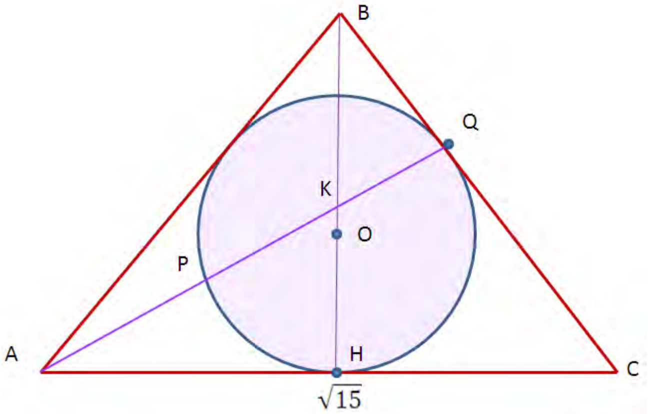
Решение:

∠MOL = LON ⇒ биссектриса в равнобедренном треугольнике MON является высотой, OL ⊥ MN и по построению OL ⊥ AC (AC – касательная) ⇒ MN // AC.

4.2.12. (ЮФМЛ) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = \sqrt{15}$, PQ = 1.

Решение:

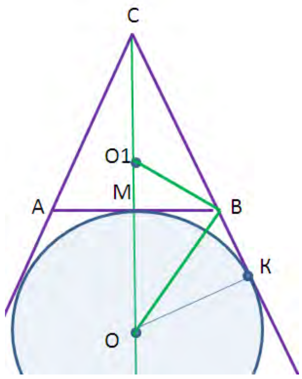
1) AQ ·AP = AH^2; $(1 + x) \cdot x = \frac{15}{4}$; $x = 1{,}5 \Rightarrow$
AP = 1,5, AQ = 2,5;
2) $\cos C = \frac{QC^2 + AC^2 - AQ^2}{2 \cdot AC \cdot QC} = \frac{\frac{15}{4} + 15 - 6{,}25}{2 \cdot \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{12{,}5}{15} =.$
3) $BC = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $BH = \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{2}.$
4) $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2} = \frac{3\sqrt{55}}{4}.$
Ответ: $\frac{3\sqrt{55}}{4}$



4.2.13. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

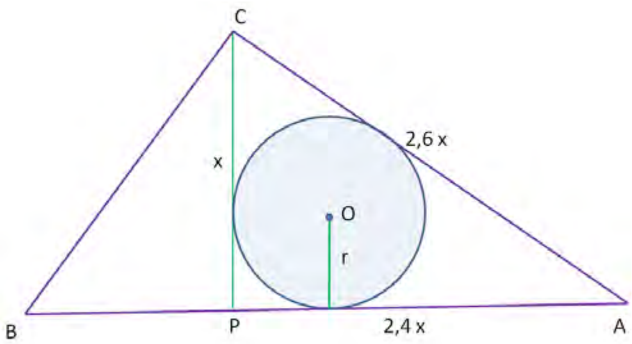
Решение
1) Так как окружности вписаны в ∠ACB, то центры окружностей лежат на биссектрисе CO этого угла. Так как ΔABC – равнобедренный, то биссектриса CO – является медианой и высотой, т.е.
AM = MB = 6. OM = 8, MO$_1$ - искомые радиус.
2) OB и BO$_1$ – биссектрисы смежных углов MBK и MBC, тогда ∠OBO$_1$ = 90°. MB – высота прямоугольного Δ OBO$_1$.
Тогда MB^2 = OM· MO$_1$, $MO_1 = \frac{MB^2}{MO} = \frac{36}{8} = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.



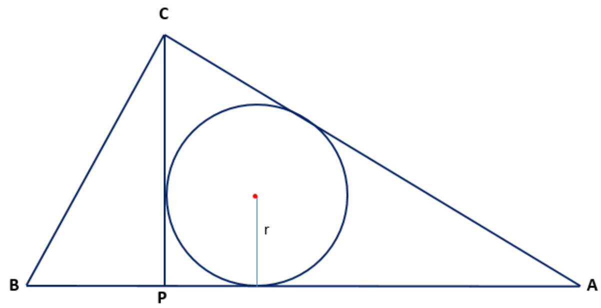
4.2.14. (Реальный ГИА_2013, B_1310) Из вершины прямого угла C проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 12 см, тангенс угла ABC равен 2,4. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение (1 способ решения)
1) ∠ABC = ∠ACP, а tg∠ACP = 2,4;
Пусть CP = x, тогда AP = 2,4x, а AC = 2,6x.
r = AP + CP – AC = x + 2,4x – 2,6x = 0,8x;
0,8x = 12, x = 15;
2) Пусть R – радиус вписанной в ΔABC окружности: R = AC + CB – AB.
Найдем CB и AB:
AC = 15 · 2,6 = 39; $\mathbf{BC} = \frac{AC}{2{,}4} = \frac{39}{2{,}4} = 16{,}25$.
AC^2 = AB · AP, $AB = \frac{AC^2}{AP} = \frac{39^2}{2{,}4 \cdot 15} = 42{,}25$
3) R = 39 + 16,25 – 42,25 = 13.
Ответ: 13.



4.2.15. (Реальный ГИА_2013, B_1309) Из вершины прямого угла C проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение (2 способ решения)

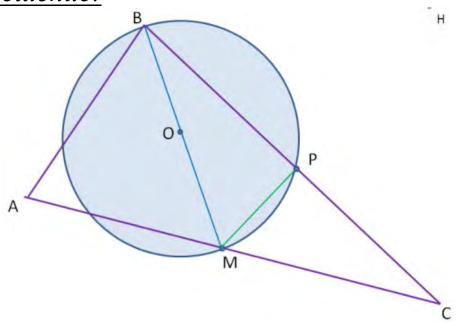


1) $\angle BAC = \angle BCP$, а $tg\angle BAC = \frac{4}{3}$;
Тогда CP = 4x, тогда AP = 3x, а AC = 5x.
2) $tg\angle BAC = \frac{4}{3} = \frac{BC}{CA} = \frac{BC}{5x}$; $BC = \frac{20x}{3}$
3) Пусть R – радиус вписанной в ΔABC
Так как $\Delta ABC \sim \Delta ACP$, то $\frac{R}{r} = \frac{BC}{CP}$;
$\frac{R}{8} = \frac{20x}{3 \cdot 4x}$; $R = \frac{40}{3}$

Ответ: $\frac{40}{3}$

4.2.16. (Реальный ГИА_2013, В_1313 *(креативная)*) Медиана ВМ треугольника АВС является диаметром окружности, пересекающей строну ВС в её середине. Длина стороны АС равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника АВС.

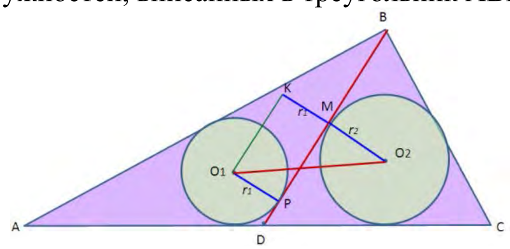
Решение:



1)Так как ВМ – медиана, то МС = АМ = 2.
2) Р – середина отрезка ВС, следовательно МР – медиана ΔMCB, $\angle MPB = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр ВМ, тогда МР – высота ΔMCB, а следовательно ΔMCB - равнобедренный, МС = МВ = = АМ = 2.
3) Точка М – равноудалена от вершин А, В и С ΔABC, следовательно М – центр описанной около ΔABC окружности и радиус R = 2.

Ответ: 2.

4.2.17. (*ТВ № 5* _2014 от А.Л.) В прямоугольном треугольнике АВС длина катета АВ равна 6, а длина катета ВС равна 8. Точка D делит гипотенузу АС пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ABD и в треугольник BCD.



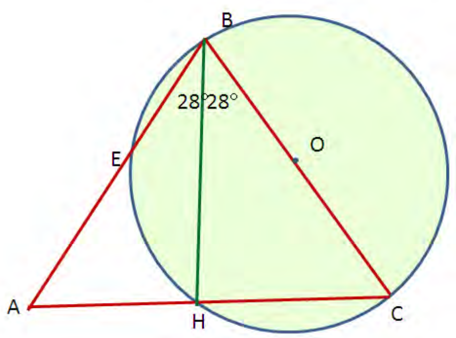
Решение.
Чтобы найти расстояние между центрами вписанных окружностей , судя по рисунку, следует построить прямоугольный треугольник , где $O_2K = r_1 + r_2$, а ОК = МР – расстояние между точками касания. В таком случае намечается план решения:
• Найти радиусы r_1 и r_2;
• Расстояние МР.

1) По теореме Пифагора АС = 10;
2) По свойству описанной около прямоугольного треугольника окружности: AD = DC = DB = R = 5;
3) Для того чтобы вычислить радиусы вписанных окружностей применяется формула
$r = \frac{S_\Delta}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ Площадь, треугольника вычислить одной из удобных формул, в данном случае можно применить теорему Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
$S_1 = \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)} = 12$; $r_1 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; $S_2 = \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)} = 12$; $r_1 = \frac{12}{9} = \frac{3}{2}$.
$O_2K = r_1 + r_2 = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$.
4) Для вычисления расстояния от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности воспользуемся формулой: $BP = \frac{BD+AB-AD}{2} = \frac{5+8-5}{2} = 4$; $BM = \frac{BD+BC-CD}{2} = \frac{5+6-5}{2} = 3$;
MP = BP – BM = 4 – 3 = 1.
5)$O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{289+36}{36}} = \sqrt{\frac{325}{36}} = \frac{5\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

4.2.18. (*ТВ № 11_2014 от А.Л.)* Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 56°. Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части. Найдите градусную меру большей из этих частей.

Решение:



1) Так как BC – диаметр окружности, а угол между высотой BH и основанием прямой, то H лежит на окружности. AH = HC.

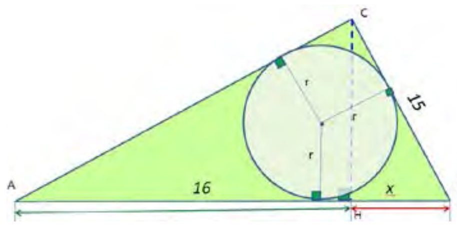
2)∠A = ∠C = 62° ⇒ ∪BEH = 124°; ∪EH = 56° ⇒ ∪BE = 124° - 62° = 62°;

∪HC = 56°.

Ответ: BE = 62°.

4.2.19. (ТВ № 12_2014 от А.Л.) Один из катетов прямоугольного треугольника равен , а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение:



1) По свойству пропорциональных отрезков получим:

$15^2 = x\,(x + 16)$; $x = 9$, тогда AB = 9 + 16 = 25.

2) AC = $\sqrt{AB^2 - CB^2} = 20$;

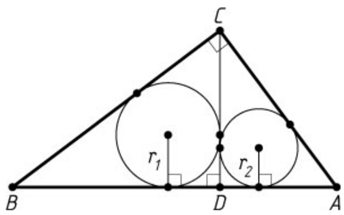
3) r = $\frac{AC+CB-AB}{2} = \frac{20+15-25}{2} = 5$

Или

r = $\frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AC\cdot CB}{AC+CB+AB} = \frac{20\cdot 15}{20+15+25} = \frac{20\cdot 15}{60} = 5$.

Ответ: 5.

4.2.20. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) . Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника – BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник ABC.



Решение: (1 способ)

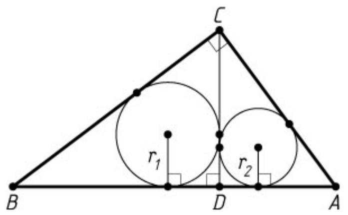
1)ΔBDC ~ ΔABC, тогда $\frac{CB}{AB} = \frac{r_1}{r}$; ΔADC ~ ΔABC, тогда $\frac{CA}{AB} = \frac{r_2}{r}$;

2)Возведём обе пропорции в квадрат и сложим почленно:

$\frac{CB^2}{AB^2} + \frac{CA^2}{AB^2} = \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2}$; $\frac{16+9}{r^2} = 1$; $r^2 = 25$, r = 5.

Ответ: 5.

4.2.21. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника – BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 5 и 12 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник ABC.



Решение: (2 способ)

Пусть AD = x, CD = y.

1)ΔBDC ~ ΔDBC, тогда $\frac{x}{y} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{12}$, y = $\frac{12x}{5}$;

2) По теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 + CD^2 = x^2 + \frac{144x^2}{25}$;

AC = $\frac{13x}{5}$

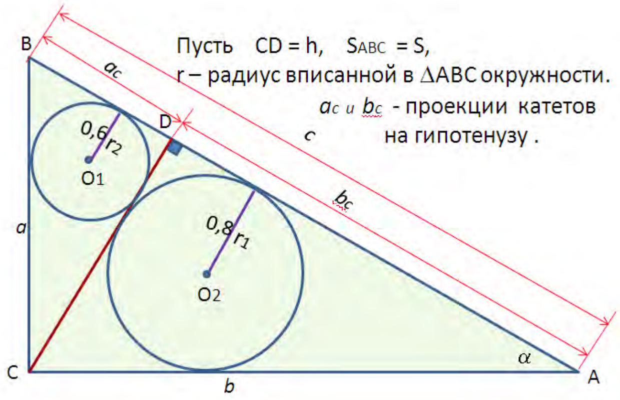
3)ΔADC ~ ΔABC, тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{r_2}{r}$; r = $\frac{AC\cdot r_2}{AD} = \frac{13x\cdot 5}{5x} = 13 =$

Ответ: 13.

4.2.22(С4. ТВ № 68_2014г от А.Ларина)
В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 и 0,8.
а) Докажите подобие треугольников ACD и BCD, ACD и ABC
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC

Решение:
а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда
$\angle ABC = \angle ACD = 90° - \alpha$, а
$\angle BCD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.
То есть $\Delta ACD \sim \Delta BCD$, $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ и $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ по двум углам.

3 способ:
б) В подобных треугольниках коэффициент подобия k равен отношению сходственных сторон и отношению всех соответствующих линейных отрезков, а отношение площадей подобных треугольников, равно квадрату коэффициента подобия. То есть,
$\frac{S_{ACD}}{S} = \frac{r_1^2}{r^2};\quad \frac{S_{BCD}}{S} = \frac{r_2^2}{r^2};$
Сложим почленно левые и правые части последних равенств: $\frac{S_{ACD}}{S} + \frac{S_{BCD}}{S} = \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2};$
$\frac{S_{ACD}+S_{BCD}}{S} = \frac{r_1^2+r_2^2}{r^2};\quad \frac{0{,}64+0{,}36}{r^2} = `1,\ r^2 = 1,$
r = 1.



4 способ: б) $\Delta ACD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{r_1}{r} = cos\alpha \Rightarrow r_1 = r\cdot\cos\alpha;$
$\Delta BCD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{r_2}{r} = sin\alpha \Rightarrow r_2 = r\cdot\sin\alpha;$
Сложим почленно квадраты двух последних равенств: $r_1^2 + r_2^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$,
$0{,}64 + 0{,}36 = r2$. r = 1`
Ответ: 1.

5 способ

еще вариант С4. a, b катеты, c - гипотенуза, c_1 и c_2 проекции катетов a и b соответственно на гипотенузу.

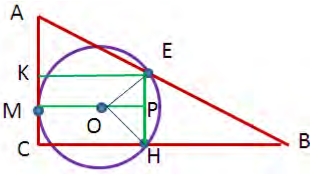
$$2r_1 = c_1 + h - a = \frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c} - a = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot(a+b-c) = \frac{2ar}{c}$$

$$2r_2 = c_2 + h - b = \frac{b^2}{c} + \frac{ab}{c} - b = \left(\frac{b}{c}\right)\cdot(a+b-c) = \frac{2br}{c}$$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a}{c}\ \frac{r_2}{r} = \frac{b}{c}\ \text{т.к.}\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 = 1\ \text{т.е.}\ r^2 = r_1^2 + r_2^2 = 0.36 + 0.64 = 1$$

4.2.23. . (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC сторона AB на 6 больше стороны BC. Медиана BE делит треугольник на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE.
Ответ: 3

4.2.24. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC . В каком отношении точка касания делит катет AC, считая от вершины A?



Решение:

1) Так как H и E – середины CB и AB, то EH – средняя линия треугольника ABC, EH //CA и EH ⊥ CB.

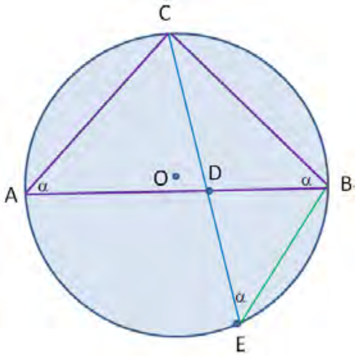
2)Построим EK ⊥ AC и MP ⊥ AC, O ∈MP. Тогда AK = KC, а отрезок OP – перпендикулярный хорде HE, делит её пополам, т.е. HP = PE, а

Следовательно и CM = MK.

3) CM = $\frac{1}{2}$CK = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$CA = $\frac{1}{4}$ CA, тогда AM : MC = 3 : 1.

Ответ: 3 : 1.

4.2.25. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) Через точку D основания равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E. Найдите AC, если CE = 3 и DE = DC.



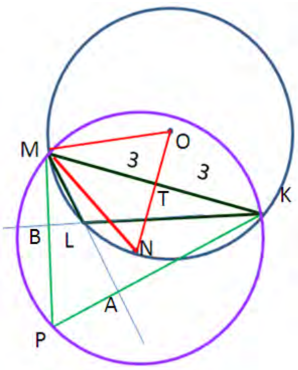
Решение:

1) ΔCBE ~ΔCDB, так как ∠E = ∠CAB (опираются на одну дугу), а ∠CAB = ∠CBA (углы при основании равнобедренного треугольника) и ∠BCE – общий. Тогда $\frac{CB}{CE} = \frac{CD}{CB}$, CB^2 = CE · CD = 3 · 1,5 = 4,5.

CB = $\sqrt{4,5} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4.2.26. (И.В.Ященко, А.С.Шестаков 30 вар. 2013г) В треугольнике KLM угол L тупой, а сторона KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, м и точку пересечения высот треугольника KLM.



Решение:

1) Пусть O – центр описанной около ΔKLM окружности, а N - центр описанной около ΔKPM окружности, где P – точка пересечения высот ΔKLM. По свойству описанной окружности, радиус OM = $\frac{MK}{2\,sin\angle MLK}$, а MN = $\frac{MK}{2\,sinP}$.

2) В четырёхугольнике APBL ∠B = ∠A = 90°, тогда ∠P + ∠ALB = 180°, а

∠P = 180° - ∠ALB = 180° - ∠KLM. MN = $\frac{MK}{2\sin(180° - \angle MLK)} = \frac{MK}{2\,sin\angle MLK}$,

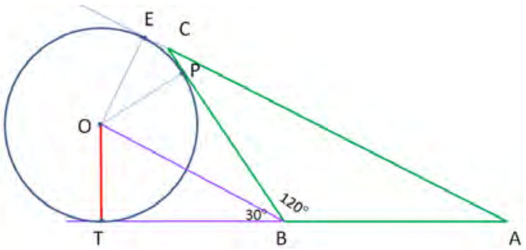
т.е. OM = MN = ON.

3) ΔOMN – равносторонний и MT – высота, так как ON – серединный перпендикуляр. MT = 3, ∠O = 60°

Sin60° = $\frac{MT}{MN}$, MN = $\frac{MT}{sin60°} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

4.2.27. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC угол B равен 120°, а длина стороны AB на $7\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC.



Решение:

1) По свойству касательных AT = AE или AB + BT = AC + CE;

BT = BP, CP = CE;

2) По условию $\frac{AB+BC+AC}{2}$ – AB = $7\sqrt{3}$; BC + AC – AB = $14\sqrt{3}$;

AB = BC + AC - $14\sqrt{3}$; Тогда BC + AC - $14\sqrt{3}$+ BT = AC + CE;

BC - $14\sqrt{3}$+ BT = CE; BC - $14\sqrt{3}$+ BT = BC – BP; 2 BT = $14\sqrt{3}$;

BT = $7\sqrt{3}$.

3) $\angle$ABC = 120° $\Rightarrow$ $\angle$TBC = 60° тогда $\angle$TBO = 30°, так как BO – биссектриса $\angle$TBC. tg$\angle$TBO = $\frac{OT}{TB}$;

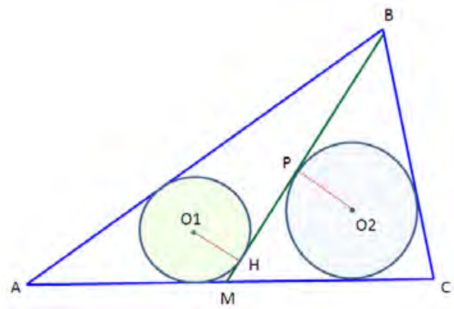
OT = $7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ = 7.

Ответ: 7.

4.2.28. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC угол B равен 120°, а длина стороны AB на $2\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC.

Ответ: 2.

4.2.29. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 20вар. 2013г) В треугольнике ABC сторона AB на 4 больше стороны BC. Медиана BE делит треугольник на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE.



Решение:

1)BH = $\frac{BM+AB-AM}{2}$; BP = $\frac{BM+CB-CM}{2}$;

HP = BH – BP = $\frac{BM+AB-AM}{2}$ - $\frac{BM+CB-CM}{2}$ = $\frac{BM+AB-AM-BM-CB+MC}{2}$ = $\frac{AB-BC}{2}$

2)Так как по условию AB > BC на 4, то AB – BC = 4.

3) HP = $\frac{AB-BC}{2} = \frac{4}{2}$ = 2. Ответ: 2

4.3. Окружность и треугольник на ЕГЭ

4.3.1. (2010) Треугольник *ABC* вписан в окружность радиуса 12. Известно, что *AB* = 6 и *BC* = 4. Найдите *AC*.

Решение:

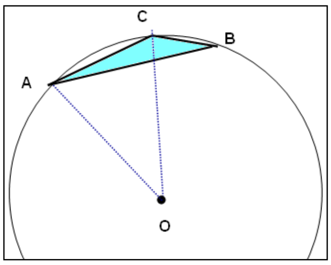


Рис. 1

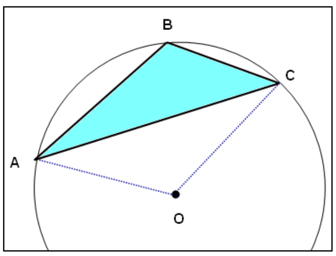


Рис. 2

<u>*1 случай:*</u> (Рис. 1) $\angle C$ – тупой.

1) Для ΔABC по теореме синусов имеем $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = 2R$,

тогда $\sin\angle A = \dfrac{1}{6}$, $\sin\angle C = \dfrac{1}{4}$, $\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$, а $\cos\angle C = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

2) $\angle B = 180° - (\angle C + \angle A)$; $\sin\angle B = \sin(180° - (\angle C + \angle A)) = \sin(\angle C + \angle A) =$

$= \sin\angle A \cdot \cos\angle C + \sin\angle C \cdot \cos\angle A = \dfrac{1}{6} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{35}}{6} = \dfrac{\sqrt{35}}{24} - \dfrac{\sqrt{15}}{24}$.

3) $AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}$.

<u>*2 случай:*</u> (Рис. 2) $\angle B$ – тупой.

1) $\sin\angle A = \dfrac{1}{4}$, $\sin\angle C = \dfrac{1}{6}$, $\cos\angle C = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$, а $\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

2) $\angle B = 180° - (\angle C + \angle A)$; $\sin\angle B = \sin(180° - (\angle C + \angle A)) = \sin(\angle C + \angle A) =$

$= \sin\angle A \cdot \cos\angle C + \sin\angle C \cdot \cos\angle A = \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{35}}{6} = \dfrac{\sqrt{35}}{24} + \dfrac{\sqrt{15}}{24}$.

3) $AC = \sqrt{35} + \sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

4.3.2. (2010) Около треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*, угол *AOC* равен 60°. В треугольник *ABC* вписана окружность с центром *M*. Найдите угол *AMC*.

<u>*Решение:*</u>

1 способ решения

<u>*1 случай*</u> (Рис. 1) $\angle AOC = 60° \Rightarrow \angle ABC = 30°$, тогда $\angle BAC + \angle BCA = 180° - 30° = 150°$; Так как M - центр вписанной окружности, то AM и MC – биссектрисы углов A и C, то есть
$\angle MAC + \angle MCA = 150° : 2 = 75°$, а $\angle AMC = 180° - 75° = 105°$

<u>*2 случай*</u> (Рис. 2) $\angle AOC = 60° \Rightarrow \angle ABC = (360° - 60°) : 2 = 150°$, тогда $\angle BAC + \angle BCA = 180° - 150° = 30°$; Так как M - центр вписанной окружности, то AM и MC – биссектрисы углов A и C, то есть
$\angle MAC + \angle MCA = 30° : 2 = 15°$, а $\angle AMC = 180° - 15° = 165°$.

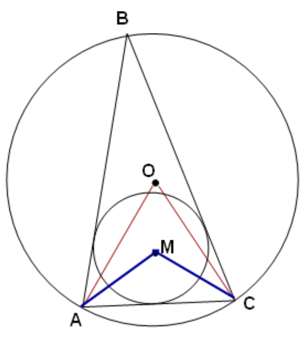


Рис. 1

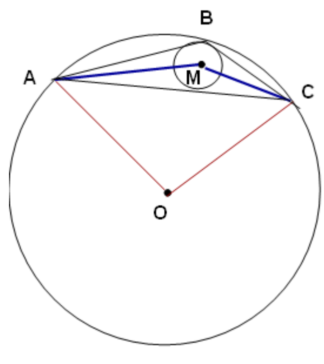


Рис. 2

2 способ решения

Если угол $\angle ABC = 30°$, то $\angle AMC = 30° : 2 + 90° = 105°$;

Если угол $\angle ABC = 150°$, то $\angle AMC = 150° : 2 + 90° = 165°$;

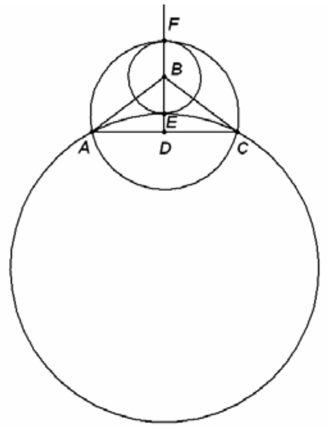
Ответ: 105°; 165°.

4.3.3. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение:
1 случай: Окружность проходит через точку E и точка A и C. BE = 2, AD = 4, AB = 5, тогда BD = 3 $\Rightarrow$ ED = 3 – 2 = 1.

AE = $\sqrt{AD^2+DE^2} = \sqrt{17}$; $S_{AEC} = \frac{1}{2}AC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4$;

$$S_{AEC} = \frac{AC \cdot AE \cdot BC}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot AE \cdot EC}{4S_{AEC}} = \frac{8 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17}}{4 \cdot 4} = \frac{17}{2}.$$



2 случай: Окружность проходит через точку F и точка A и C.
BF = 2, AD = 4, AB = 5, тогда BD = 3 $\Rightarrow$ FD = 3 + 2 = 5.

AF = $\sqrt{AD^2+DF^2} = \sqrt{41}$; $S_{AFC} = \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$;

$$S_{AFC} = \frac{AC \cdot AF \cdot FC}{4R} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot AF \cdot FC}{4S_{AFC}} = \frac{8 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{41}}{4 \cdot 4} = \frac{41}{2}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$; $\frac{41}{2}$.

4.3.4. (2010) Дан прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *B* и углом *α* при вершине *A*. Точка *D* - середина гипотенузы. Точка *C*1 симметрична точке *C* относительно прямой *BD*. Найдите угол . AC_1B

Решение.
1 случай: (Рис. 1)
Пусть угол α < 45°, тогда отрезок CC_1 не пересекает отрезок BD. ΔABC – прямоугольный, тогда точка D – центр описанной окружности, а BD – диаметр, тогда точка C_1 – точка этой окружности. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = 90° - \alpha$, $\angle AC_1B = \angle ACB$ – как вписанные углы, опирающиеся на один диаметр. $\angle AC_1B = 90° - \alpha$.

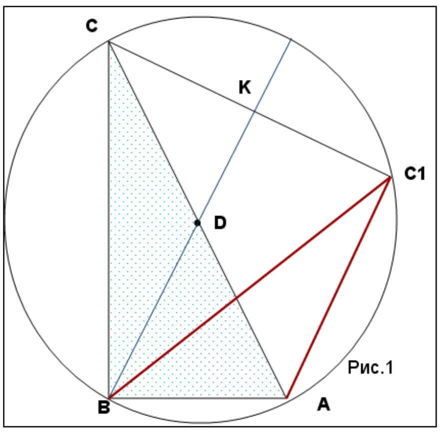


Рис.1

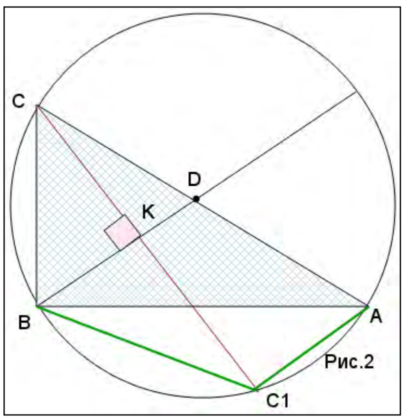


Рис.2

2 случай:
Пусть угол α = 45°, тогда отрезок CA $\perp$ BD, точка C_1 совпадает с точкой A, $\angle AC_1B$ – как геометрический угол не существует.
3 случай:(Рис. 2)

Пусть угол $\alpha > 45°$, тогда отрезок CC_1 пересекает отрезок BD. ΔABC – прямоугольный, тогда точка D – центр описанной окружности, а BD – диаметр, тогда точка C_1 – точка этой окружности. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 90°$, Дуга BCA равна сумме дуг BC и CA, то есть $2(90° + \alpha)$, а $\angle BC_1A = 90° + \alpha$, половине дуги, на которую опирается.
Ответ: $90° + \alpha$, если $\alpha < 45°$ или $90° - \alpha$, если $\alpha > 45°$.

4.3.5. **(**2010) В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, *O* - центр окружности, касающейся стороны *BC* и продолжений сторон *AB* и *AC.* Известно, что $BC = 12$, $MN = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*.

Решение:
1 случай: (Рис. 1) ΔABC – остроугольный, $\angle A$ – острый.

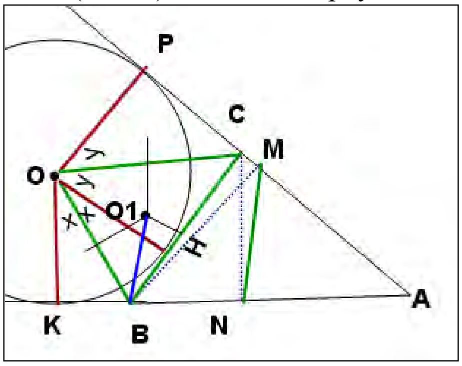


Рис. 1

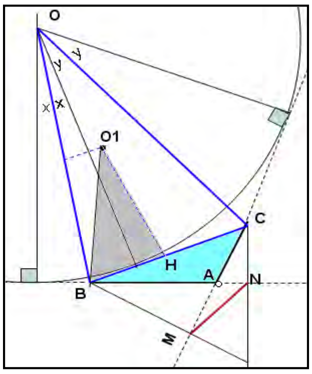


Рис. 2

1) Так как MB и CN – высоты треугольника, то

$$\angle BCN = \angle BMN \Rightarrow \angle CBN = \angle AMN \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AMN, \text{ тогда } \frac{MN}{BC} = \frac{MA}{AB} = \cos \angle BAM.$$

Так как $\frac{MN}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, то $\cos\angle BAM = \frac{1}{2}$, а $\angle BAM = 60°$.
2) OP и OK – радиусы окружности, касающейся стороны BC, и продолжения сторон AC и AB. Тогда $\angle APO = \angle AKO = 90°$, $\angle POK = 120°$, а $\angle BOC = 60° \Rightarrow \angle BO_1C = 120°$, как центральный угол опирающийся на ту же дугу BC описанной окружности с центром в точке $O_1 \Rightarrow \angle BO_1H = 60°$.

3) Из ΔBO_1H найдем BO_1 – радиус описанной около ΔBOC окружности: $BH = 6$,

$$BO_1 = BH : \sin \angle BO_1H = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

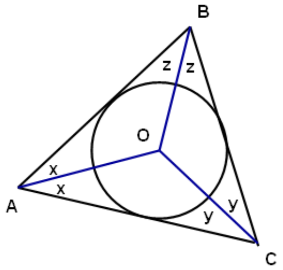
2 случай: (Рис. 2) $\angle A$ – тупой.
1) $\angle BAM = 120°$, $\angle POK = 60°$, $\angle BOC = 30° \Rightarrow \angle BO_1C = 60°$, $\angle BO_1H = 30°$,
$BO_1 = BH : \sin \angle BO_1H = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ или 12.

4.3.6. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

п.3 .*Если O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то выполняются равенства:*

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°; \qquad \angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90°; \qquad \angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90°;$$



$x + y + z = 90°$, $x + y = 90° - z$,
$\angle AOC = 180° – (x + y) = 180° - 90° + z = z + 90°$
$\angle AOC = \dfrac{\angle B}{2} + 90°$;

Решение:
$\Delta ABC \sim \Delta AMN$, $k = 2$.
$\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$ $\cos\angle BAM = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$, $\angle BAM = 60°$, тогда
Рис. 1 : $\angle BAC = 60°$, $\angle BOC = \dfrac{\angle A}{2} + 90° = 120°$.

По теореме синусов имеем $2R = \dfrac{BC}{\sin 120^\circ} = 24\cdot 2$, $R = 24$.

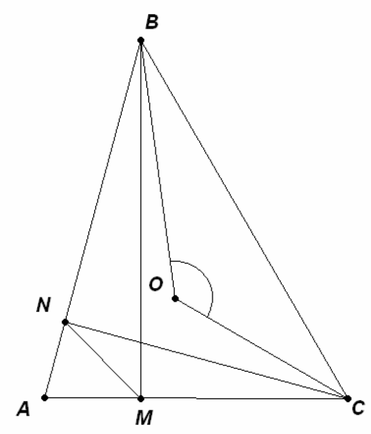


Рис. 2 : $\angle BAC = 120°$, $\angle BOC = \dfrac{\angle A}{2} + 90° = 150°$. По теореме синусов имеем
$2R = \dfrac{BC}{\sin 150^\circ} = 16\sqrt{3}$, $R = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}$; 24.

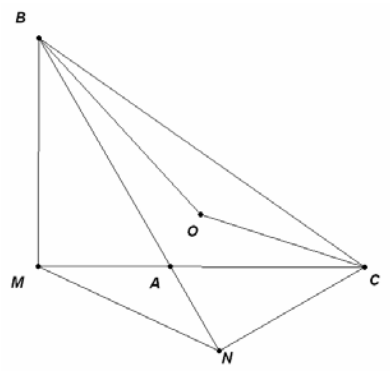


Рис. 1 *Рис. 2*

4.3.7. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении 1: 2 . Найдите углы треугольника AMB.

Решение:

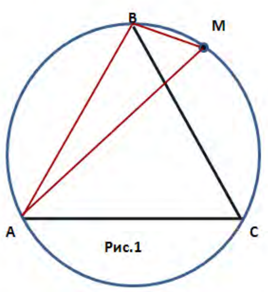
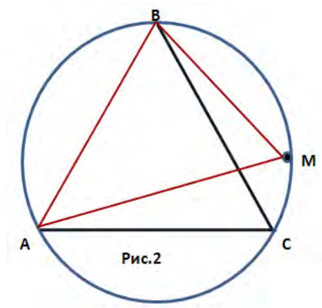


Рис 1. Так как треугольник равносторонний, то все углы равны 60°. Тогда $\cup AB = \cup BC = \cup AC = 120°$ $\Rightarrow$
$\cup BM = 120° : 3 = 40°$, а $\cup MC = 80°$.
Тогда $\angle BAM = \frac{1}{2}\cup BM = 20°$, $\angle BMA = \frac{1}{2}\cup AB = 60°$,
$\angle ABM = \frac{1}{2}\cup ACM = (120° + 80°): 2 = 100°$.
Рис 2. $\cup CM = 120° : 3 = 40°$, а $\cup MB = 80°$. Тогда
$\angle BAM = \frac{1}{2}\cup BM = 40°$, $\angle BMA = \frac{1}{2}\cup AB = 60°$, $\angle ABM = \frac{1}{2}\cup ACM = (120° + 40°): 2 = 80°$.



Ответ: 40°; 80°; 60° или 60°; 20°; 100°.

4.3.8. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.

Решение:

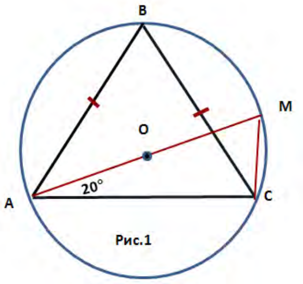
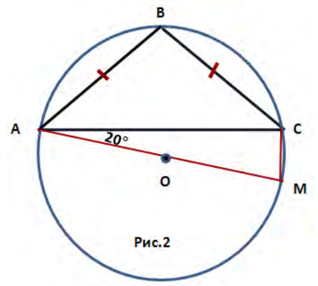


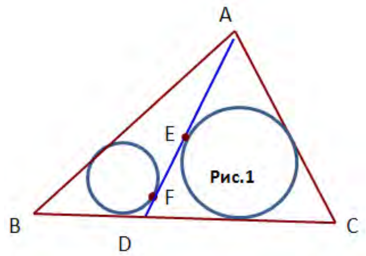
Рис.1. ΔAMC прямоугольный, так как ∠ACM =90° - опирается на диаметр окружности ⇒ ∠AMC = 70°. Тогда ∠AMC = ∠ABC = 70°- как углы опирающиеся на одну дугу ∪AC. ∠BAC =∠BCA = (180° - 70°) : 2 = **55°**.
Рис.2 Тогда ∠AMC = 70°,
а ∠ABC = 180° - 70°= 110°,
∠BAC =∠BCA = (180° - 110°) : 2 = **35°**.



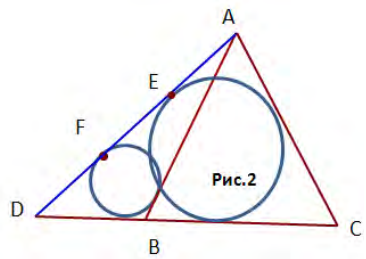
Ответ: 35° или 55°.

4.3.9. В треугольнике ABC AB = 7, BC = 9, CA = 4. Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 1: 5. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение:
Рис.1: согласно опорной задаче № 3 имеем:
DE = $\frac{DA+DC-AC}{2}$, DF = $\frac{DB+DA-AB}{2}$. Тогда FE = DE – DF.
FE = $\frac{DA+DC-AC}{2} - \frac{DB+DA-AB}{2} = \frac{DC-AC-DB+AB}{2}$.

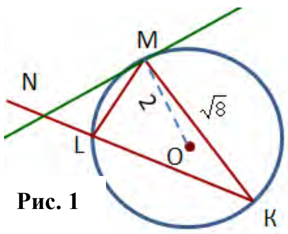


Так как *BD : DC = 1: 5,* то *BD* = $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} =$ 1,5; *DC* = 7,5. FE = $\frac{7,5-4-1,5+7}{2}$ = 4,5.
Рис.2: DE =$\frac{DA+DC-AC}{2}$, DF =$\frac{DB+DA-AB}{2}$.
FE = $\frac{DC-AC-DB+AB}{2}$. *BD* = $\frac{9}{4} = 2{,}25$;
BC = 9. FE= $\frac{9+2{,}25-4-2{,}25+7}{2}$ = 6.

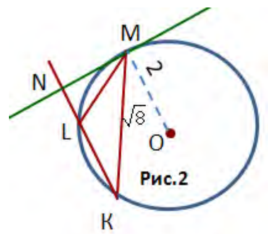


Ответ: 4,5 или 6.

4.3.10. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM, пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N. Известно, что радиус окружности равен 2, KM = $\sqrt{8}$ и ∠MNK + ∠KML = 4∠LKM . Найдите длину касательной MN.



Решение:
Пусть ∠ MKL = α, тогда ∠NML =, как угол, опирающийся на ту же дугу ∪ ML. По условию ∠MNK + ∠KML = 4∠LKM, ∠MNK + ∠KML = 4α. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то ∠MNK + ∠NMK + ∠ MKN = 180° или ∠MNK + ∠KML+ ∠NML + ∠ MKN = 180°, 4α +α + α = 180°, α = 30°;
По теореме синусов $\frac{MK}{sin\angle MLK}$ = 2R, sin∠MLK = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,
Тогда по **Рис. 1**, ∠MLK = 45°, а ∠MOK = 90° как центральный угол опирающийся на дугу
∪ MK = 90 °, ∠OMK = ∠OKM = 45°. ∠NMK = 90° + 45° =135°, а ∠MNK = 180° - (135° + 30°) = 15°; По теореме синусов для ΔNMK имеем: $\frac{MN}{sin\angle K} = \frac{MK}{sin\angle N}$,
MN = $\frac{MK\cdot sin\angle K}{sin\angle N} = \frac{\sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}}{sin15°} = \frac{\sqrt{2}}{sin15°}$.



По **Рис.2** ∠MLK = 135°, ∪ MK = 270, а дополнительная ей дуга равна 90° или ∠MLK = 135° или ∪ MK = 270°, а дополнительная ей дуга равна ∠OMK = ∠OKM = 45°,

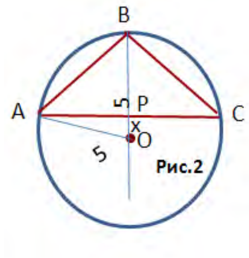
∠NMK = 90° - 45° = 45°, ∠MNK = 180° - (45° + 30°) = 105°, MN = $\frac{MK\cdot sin\angle K}{sin\angle N} = \frac{\sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}}{sin105°} = \frac{\sqrt{2}}{sin105°}$.

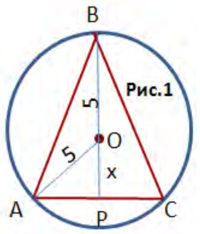
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{sin15°} = 2(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{\sqrt{2}}{sin105°} = 2(\sqrt{3}-1)$.

4.3.11. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N. Найдите AB, если AC = 8 и MN = 3.

Решение: Так как треугольник равнобедренный, то CM = CN, ΔABC ~ ΔMCN,
тогда $\frac{3}{2x} = \frac{8-x}{8}$, отсюда x = 2 или x = 6, тогда AB = 4 или AB = 12.
Ответ: 4 или 12.

4.3.12. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.





Решение: BP + AC = 16,
Рис. 1: BP = h = x + 5, тогда x + 5 + AC = 16, AC = 11 – x, а AP $=\frac{11-x}{2}$, а теореме Пифагора $OA^2 = AP^2 + OP^2$ или $25 = x^2 + \left(\frac{11-x}{2}\right)^2$,
$4x^2 + (11 - x)^2 = 100$, $5x^2 - 22x + 21 = 0$, $x_1 = 3$, а $x_2 = \frac{7}{5}$.
BP = 8 или BP = 6,4.
Рис.2: BP = h = 5 - x, тогда 5 - x + AC = 16, AC = 11+ x, а AP $= \frac{11+x}{2}$
По теореме Пифагора $OA^2 = AP^2 + OP^2$ или $25 = x^2 + \left(\frac{11+x}{2}\right)^2$, $4x^2 + (11 + x)^2 = 100$, $5x^2 + 22x + 21 = 0$,
$x_1 = -3$, а $x_2 = -\frac{7}{5}$, что не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: 6,4 или 8.

4.3.13. (ТР от 20.10.2010 г.) В треугольнике *ABC* *AB* = 13, *BC* = 10, *CA* = 7. Точка *D* лежит на прямой *BC* так, что *BD* : *DC* = 1 : 4.Окружности, вписанные в каждый из треугольников *ADC* и *ADB*, касаются стороны в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.
Ответ:6 или 8.

4.3.14. (ТР от 20.10.2010 г.) Две окружности, касающиеся прямой в точках *A* и *B*, пересекаются в точках *C* и *D*, причем *AB* = 12, *CD* = 5. Найдите медиану *CE* треугольника *ABC*.
Ответ: 9 или 4.

4.3. 15. В треугольнике ABC AB=10, BC = 5, CA = 6 . Точка D лежит на прямой BC так, что BD : DC = 1 : 2 . Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF .
Ответ: $\frac{9}{2}$; $\frac{17}{6}$

4.3.16. (ТР от 09.12.2010) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
Ответ: $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

4.3.17. (ТР от 09.12.2010) Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
Ответ: : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

4.3.18. (ТР от 12.04.2011) Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 13 *AC* = 5, и *BC* = 12. На стороне *BC* взята точка *D*, а на отрезке *AD* –точка *O*, причем *CD* = 4 и *AO* = 3*OD*. Окружность с центром *O* проходит через точку *C*. Найдите расстояние от точки *C* до точки пересечения этой окружности с прямой *AB*.

Решение:

!!! $12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow \Delta ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90°$.

1)Построим $AP \parallel BC$ и $CO \cap AP = P$, $CO \cap AB = M$.

Получим:

$\Delta CDO \sim \Delta AOP$, $k = \frac{AO}{OD} = 3$, тогда $AP = 12$.

$\Delta CAP = \Delta ACB$ по катетам AC и $AP = CB \Rightarrow CP = AB = 13$.

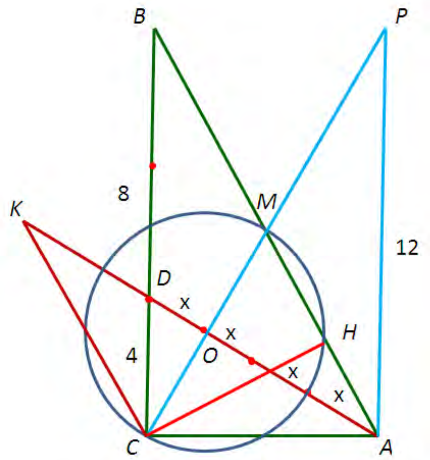
$\Delta MAP = \Delta MCB$ по стороне $CB = AP$ и двум прилежащим углам $\Rightarrow BM = MA = CM = MP = 6{,}5$.

2) Построим $CK \parallel AB$ и получим:

$\Delta KDC \sim \Delta BDA$ по двум углам $\angle KDC = \angle ADB$ - вертикальные;

$\angle KCB = \angle ABC$ – накрест лежащие, $k = \frac{BD}{CD} = 2 \Rightarrow$

$KD = 2x$.



$\Delta COK = \Delta AOM$ – $KO = AO = 3x$, $\angle CKO = \angle OAP$ – накрест лежащие; $\angle KOC = \angle AOM$ - вертикальные;
Тогда $CO = OM$, т.е. M лежит на окружности и CM – диаметр. $CM = 6{,}5$.

3) Так как CM – диаметр, то $CH \perp AB$, тогда $CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$

Ответ: 6,5 и $\frac{60}{13}$.

4.3.19. (ТВ № 3 2012 г от А.Л.)На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре построена полуокружность ω, которая пересекает прямые AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Найдите радиус полуокружности ω, если известно, что $A_1C = 8$, $B_1C = 7$, а площадь треугольника A_1B_1C равна $14\sqrt{3}$.

Решение:

$S_{B1CA1} = \frac{1}{2} CB_1 \cdot CA_1 = \frac{1}{2} 7 \cdot 8 \sin\angle C = 7 \cdot 4 \sin\angle C$; $7 \cdot 4 \sin\angle C = 14\sqrt{3}$, $\sin\angle C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

Рис. 1 $\angle C = 60°$; Рис. 2 $\angle C = 120°$;

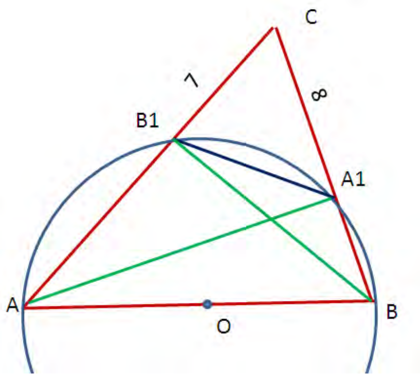


Рис. 1

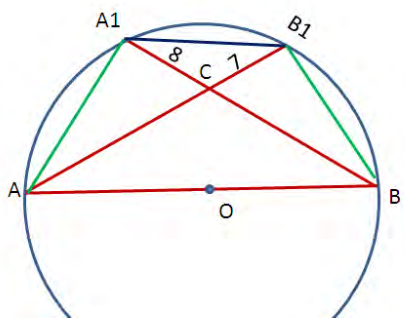


Рис.2

Рис. 1 $\angle C = 60°$, тогда $\angle CAA_1 = 180° - 90° - 60° = 30° \Rightarrow AC = 16$; Аналогично $CB = 14$.

По теореме косинусов : $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos 60° = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 228$;

$AB = 2\sqrt{57}$; $R = \sqrt{57}$.

Рис. 2 $\angle C = 120°$, тогда $\angle ACA_1 = 180° - 120° = 60°$; $\angle CAA_1 = 180° - 90° - 60° = 30° \Rightarrow$
$AC = 16$; Аналогично $CB = 14$. По теореме косинусов :

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos 120° = 16^2 + 14^2 + 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 676$; $AB = 26$; $R = 13$.

Ответ: $\sqrt{57}$; 13.

4.3.20. (ТВ № 3 2012 г от А.Л.) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающийся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение:

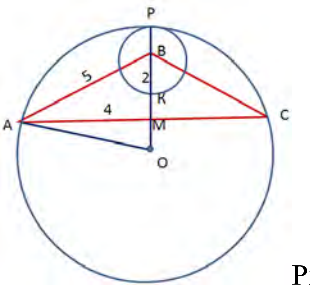


Рис.1

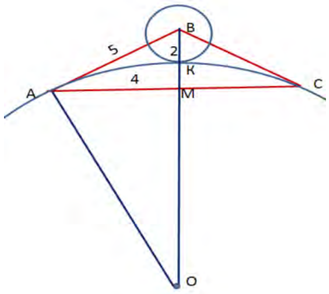
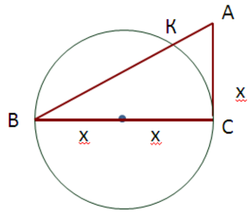


Рис.2

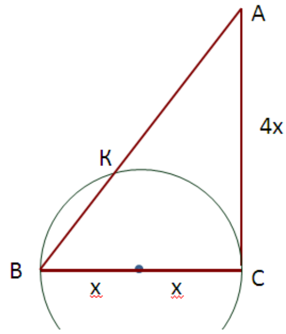
Рис.1. Пусть окружность с центром в точке O касается данной окружности внутренним образом. MB = 3, MP = 3 +2 = 5, OM = R – 5, $OA^2 = OM^2 + AM^2$, $R^2 = (R-5)^5 + 16$, 10R = 41, R = 4,1.
Рис.2. OM = R –(3 – 2) = R – 1, $R^2 = (R-1)^5 + 16$, 2R = 17, R = 8,5.
Ответ: 4,1; 8,5.

4.3.21. (ТВ № 8 2012 г от А.Л.) Сторона BC прямоугольного треугольника ABC является диаметром окружности. Эта окружность пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите хорду BK, если известно, что площадь треугольника ABC равна 3, а один катет этого треугольника вдвое больше другого.

Решение:



1. Пусть AC = x, BC = 2x. Тогда $3 = 0{,}5 \cdot 2x^2$; $x^2 = 3$; $x = \sqrt{3}$.
$AB = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{15}$. По свойству касательной и секущей
$AB \cdot AK = AC^2$; $\sqrt{15} \cdot AK = 3$; $AK = \frac{\sqrt{15}}{5}$; $BK = \sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$.
Итак, $BK = \frac{4\sqrt{15}}{5}$

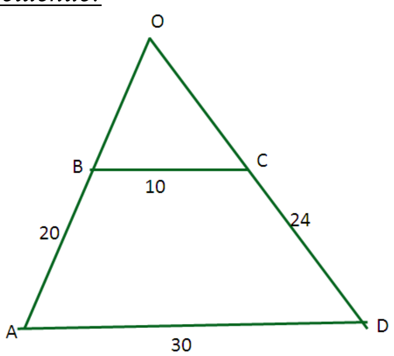


2 случай: AC = 4x, BC = 2x. Тогда $3 = 4x^2$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AC = 2\sqrt{3}$; BC = $\sqrt{3}$;
$AB = \sqrt{16x^2 + 4x^2} = 2x\sqrt{5} = \sqrt{15}$;
По свойству касательной и секущей
$AB \cdot AK = AC^2$; $\sqrt{15} \cdot AK = 12$; $AK = \frac{12\sqrt{15}}{15} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$;
$BK = \sqrt{15} - \frac{4\sqrt{15}}{5} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

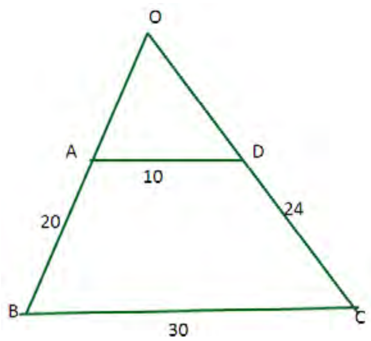
Ответ: $\frac{4\sqrt{15}}{5}$; $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4.3.22. (ТР № 14 2012 от А.Л.) В трапеции ABCD с основаниями 30 и 10 боковые стороны AB и CD равны соответственно 20 и 24. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OBC.

Решение:



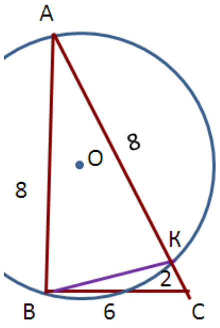
1) Так как ΔOAD ~ ΔOBC, то к = 3.
Пусть OB = x, тогда OA = 3x , тогда 20 + x = 3x, x = 10.
OB = 10, OC = 12. $S_{OBC} = 48$,
$R = \frac{OB \cdot BC \cdot OC}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}$;
2) OB = 30, BC = 30, OC = 36,
$S = 18 \cdot 12 \cdot 2$, $R = \frac{30 \cdot 30 \cdot 36}{4 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 2} = \frac{75}{4}$.



Ответ: 6,25; 18,75

4.3.23. (ТВ№ 17 2012 от А.Л.) В прямоугольном треугольнике АВС катеты АВ=8, СВ=6. На гипотенузе АС отмечена точка К так, что треугольник АВК – равнобедренный. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВК.

Решение:



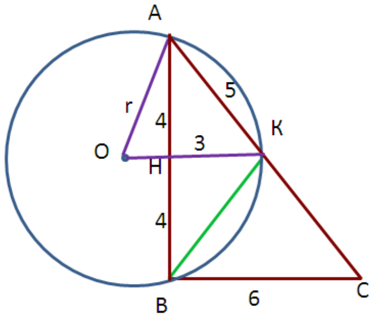
1)Пусть ВК = АК, а КН $\perp$АВ, тогда АН = НВ = 4, К – середина АС, т.е КН – средняя линия ΔАВС, НК = 3.ΔОНА – прямоугольный, АН = 4, ОН = r – 3, $r^2 = 16 + (r-3)^2$, 6r = 25, $r = \frac{25}{6}$.

2) АВ = АК = 8, $S_{ABK} = \frac{8\cdot 8}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{96}{5}$;

$BK^2 = 2\cdot 64 - 2\cdot 64\cdot\frac{4}{5} = \frac{128}{5}$; $BK = \frac{8\sqrt{10}}{5}$;

$R = \frac{8\cdot 8\cdot 8\cdot 5\sqrt{10}}{5\cdot 4\cdot 96} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Ответ: $\frac{25}{6}$; $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.



4.3.24. (ТВ№18-2012 от А.Л.) В равнобедренный треугольник с основанием 24 и боковой стороной 20 вписана окружность. Найдите длину отрезка, заключенного между двумя сторонами треугольника, параллельного третьей стороне и касающегося окружности.

Решение:
1 случай: отрезок параллелен основанию. Высота опущенная на основание h = 16, по свойству биссектрисы, найдем отрезки, на которые биссектриса делит высоту: 3: 5 или 6 и 10.
Из подобия получим 6.
2 случай: отрезок параллелен боковой стороне и отсекает равнобедренный треугольник, подобный данному. Высота, опущенная на боковую сторону равна $\frac{96}{5}$, их подобия искомый отрезок равен 7,5.
Ответ: 6; 7,5.

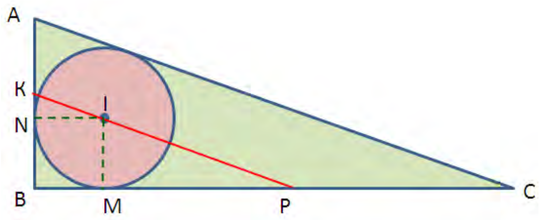
4.3.25. (ТВ№1-2013 от А.Л.) Дан прямоугольный треугольник АВС, с катетами АВ и ВС (АВ=5, ВС=12). Пусть точка I – центр окружности, вписанной в треугольник АВС. Прямая, проходящая через точку I, параллельна одной из сторон треугольника АВС и пересекает две другие стороны в точках К и Р. Найдите длину отрезка КР.

Решение:

По теореме Пифагора АС = 13, BN = BM = MI = IN = $r = \frac{S}{p} = \frac{AB\cdot BC}{AB+BC+AC} = \frac{5\cdot 12}{5+12+13} = \frac{60}{30} = 2$.

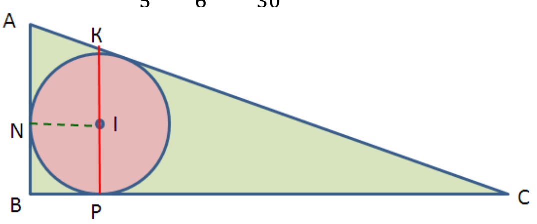
1) Пусть РК // АС.

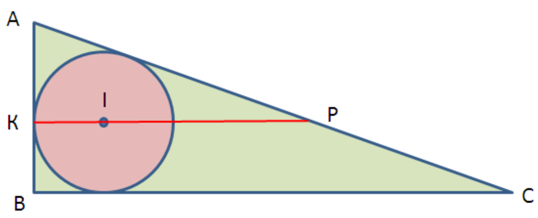
ΔMIP ~ΔАВС, $\frac{AC}{IP} = \frac{AB}{IM}$, $IP = 13\cdot 2 : 5 = \frac{26}{5}$;



ΔNIK ~ΔАВС, $\frac{AC}{IK} = \frac{CB}{IN}$, $IK = 13\cdot 2 : 12 = \frac{13}{6}$;

KP = KI + IP = $\frac{26}{5} + \frac{13}{6} = \frac{221}{30}$.





2) Пусть РК // АВ. ΔKCP ~ΔАВС, $\frac{BC}{CP} = \frac{AB}{PK}$, $KP = (12 - 2)\cdot 5 : 12 = \frac{25}{6}$.

3) Пусть РК // СВ. ΔKAP ~ΔАВС, $\frac{BA}{AK} = \frac{CB}{PK}$, $KP = (5 - 2)\cdot 12 : 5 = \frac{36}{5}$.

Ответ: $\frac{221}{30}$; $\frac{25}{6}$; $\frac{36}{5}$.

4.3.26. (ТВ№2-2013 от А.Л.) Дан треугольник ABC, где BA = 5, BC = 8. В треугольник вписана окружность, касающееся стороны BC в точке P. Известно, что BP = 3. Найдите площадь треугольника BMP, где M - точка касания окружности со стороной треугольника ABC.

Решение:

Рис.1.

1) По свойству касательных BM = BP = 3, тогда CP = CT = 5, MA = AT = 2, а сторона AC = 7.

2) По формуле Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$ =10 $\sqrt{3}$, а радиус вписанной в треугольник окружности r = $\frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$, OM =$\sqrt{3}$.

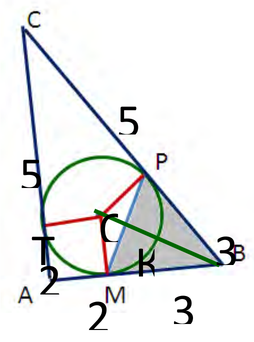


Рис. 1

3) Из ΔOBM найдем гипотенузу OB: OB = $\sqrt{3+9}$ = $2\sqrt{3}$, тогда $\angle OBM = 30°$, а $\angle PBM = 60°$, а ΔPBM Равносторонний, со стороной равной 3.

4) $S_{\Delta BPM}$ = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Рис.2.

1) $S_{\Delta BPM} = S_{\Delta BCM} - S_{\Delta PCM}$ =

$= \frac{1}{2}$ CM ·CB ·sin∠C - $\frac{1}{2}$ CM ·CP ·sin∠C =

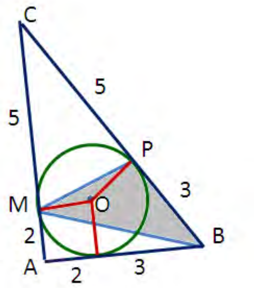


Рис. 2

$= \frac{1}{2}$ CM ·(CB – CP) ·sin∠C = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (8-5) \cdot$ sin∠C = $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot$ sin∠C .

2) sin∠C = $\frac{2S_{\Delta ABC}}{AC \cdot CB} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7 \cdot 8} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

3) $S_{\Delta BPM} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{75\sqrt{3}}{28}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; $\frac{75\sqrt{3}}{28}$.

4.3.27. (ТВ№14-2013 от А.Л.) Дан треугольник ABC, в котором $\angle ABC = arccos\frac{1}{2}$. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AC, CB, BA в точках K, T и M соответственно. Прямая AT пересекает окружность в точке L, причем AL=2. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого AT, а другая содержит точку касания окружностью треугольника ABC, если AK=4.

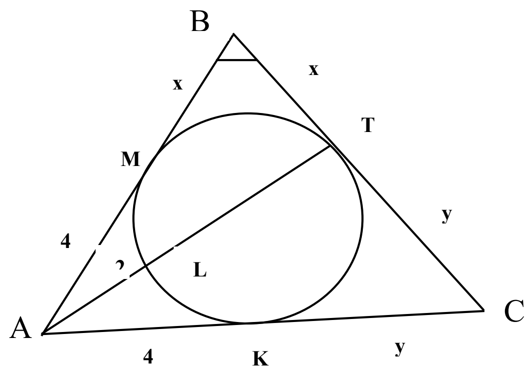
Решение.

Задача требует найти площади треугольников *ABT* и *ACT*.

Ясно, что $\angle ABC = 60^\circ$.

По свойству секущей и касательной, проведенной из точки вне круга имеем:

$$AT \cdot AL = AM^2. \qquad AT = \frac{AM^2}{AL} = 8.$$



Также заметим, что по свойству касательной к окружности будем иметь: *AK*=*AM*=4, *BM* = *BT*, *CT* = *KC*.

Случай 1. Пусть $BT = BM = x$.

По теореме косинусов: $AT^2 = (x+4)^2 + x^2 - 2 \cdot (x+4) \cdot x \cdot \frac{1}{2}$;

$x^2 + 8x + 16 + x^2 - x^2 - 4x = 64$; $x^2 + 4x - 48 = 0$; $x = -2 \pm \sqrt{4+48} = -2 \pm \sqrt{52} =$ =

$-2 \pm 2\sqrt{13}$; Корень $-2-2\sqrt{13}$ не подходит по смыслу задачи.

Значит, $BT = BM = 2\sqrt{13} - 2 = 2 \cdot (\sqrt{13} - 1)$.

$AB = 4 + x = 4 - 2 + 2\sqrt{13} = 2 + 2\sqrt{13} = 2 \cdot (\sqrt{13} + 1)$.

$S(ABT)=\frac{1}{2}AB\cdot BT\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)\cdot 2\left(\sqrt{13}-1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(13-1\right)\cdot\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Итак, $S(ABT)=12\sqrt{3}$.

Случай 2.

Пусть $CT=KC=y$. Тогда по теореме косинусов: $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 60^\circ$.

$AC^2=AB^2+BC^2-AB\cdot BC$

или $(4+y)^2=\left(2\sqrt{13}+2\right)^2+\left(2\sqrt{13}-2+y\right)^2-\left(2\sqrt{13}+2\right)\cdot\left(2\sqrt{13}-2+y\right)$.

$16+8y+y^2=\left(2\sqrt{13}+2\right)^2+\left(2\sqrt{13}-2+y\right)^2-2\left(2\sqrt{13}+2\right)\cdot\left(2\sqrt{13}-2+y\right)+$
$+\left(2\sqrt{13}+2\right)\cdot\left(2\sqrt{13}-2+y\right)$;

$16+8y+y^2=\left(2\sqrt{13}+2-2\sqrt{13}+2-y\right)^2+52-4\sqrt{13}+2\sqrt{13}y+4\sqrt{13}-4+2y$;

$16+8y+y^2=(4-y)^2+48+2\sqrt{13}y+2y$;

$16+8y+y^2=16-8y+y^2+48+2\sqrt{13}y+2y$;

$8y+8y-2\sqrt{13}y-2y=48$; $(14-2\sqrt{13})y=48$; $\left(7-\sqrt{13}\right)y=24$;

$$y=\frac{24}{7-\sqrt{13}}=\frac{24\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)}{\left(7-\sqrt{13}\right)\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)}=\frac{24\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)}{49-13}=\frac{24\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)}{36}=\frac{2\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)}{3}=\frac{14+2\sqrt{13}}{3}.$$

$$BC=x+y=2\sqrt{13}-2+\frac{14+2\sqrt{13}}{3}=\frac{6\sqrt{13}-6+14+2\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{13}+8}{3}=\frac{8\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)}{3}.$$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1+\sqrt{13}\right)\cdot\frac{8\left(\sqrt{13}+1\right)}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot\left(1+\sqrt{13}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

$$S(ATC)=S(ABC)-S(ABT=\frac{4\cdot\left(1+\sqrt{13}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{3}-12\sqrt{3}=\frac{4\cdot\left(1+2\sqrt{13}+13\right)\cdot\sqrt{3}-36\sqrt{3}}{3}=$$

$$4\sqrt{3}\cdot\frac{14+2\sqrt{13}-9}{3}=4\sqrt{3}\cdot\frac{5+2\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ или $4\sqrt{3}\cdot\frac{5+2\sqrt{13}}{3}$.

4.3.28. (ТВ№7-2013 от А.Л.) Дан прямоугольный треугольник *MNK* с катетами 5 и 12. Треугольник *KNJ*– равносторонний, причем точка *J* и точка *M* лежат по разные стороны от прямой *NK*. Найдите расстояние от центра вписанной окружности в *MNK* до центра вписанной в K*NJ* окружности.

Решение:

1 случай: Равносторонний треугольник построен на гипотенузе.

1)NK = 13, r = $\frac{5\cdot 12}{(5+12+13)}$ = 2,

NB = NC = 12 – r = 10.

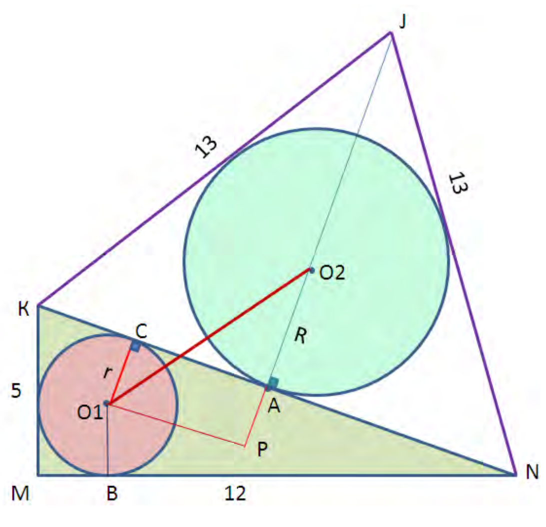
2) ΔKNJ – равносторонний, R = $\frac{1}{3}$ JA = $\frac{13\sqrt{3}}{6}$,

NA = $\frac{1}{2}$ NK = $\frac{13}{2}$,

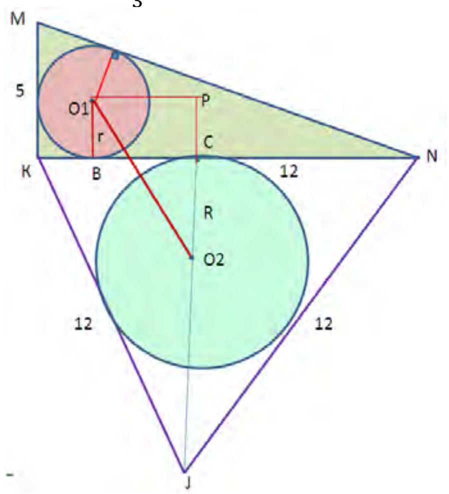
AC = O_1P = NC – NA = 10 - $\frac{13}{2}=\frac{7}{2}$.

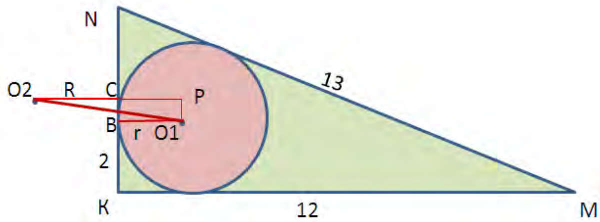
3) O_2P = r + R = 2 + $\frac{13\sqrt{3}}{6}$, тогда по теореме Пифагора

$O_1O_2=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{144+312\sqrt{3}+507}{36}}=\sqrt{\frac{273+78\sqrt{3}}{9}}$



$O_1O_2 = \frac{\sqrt{273+78\sqrt{3}}}{3}$.





Случаи 2 и 3 решаются аналогично.

Ответ : $\frac{\sqrt{273+78\sqrt{3}}}{3}$; $\frac{\sqrt{57+30\sqrt{3}}}{3}$; $2\sqrt{8+2\sqrt{3}}$.

4.3.29. (ТВ№31-2013, А. Л.) Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника ABC, угол AOC равен 60 градусов. Найдите угол AMC, где M - центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:

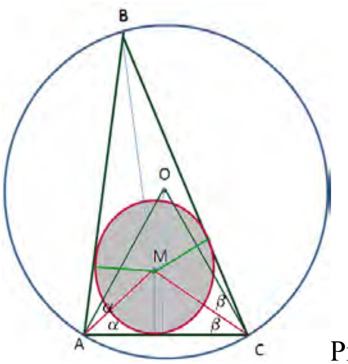


Рис.1

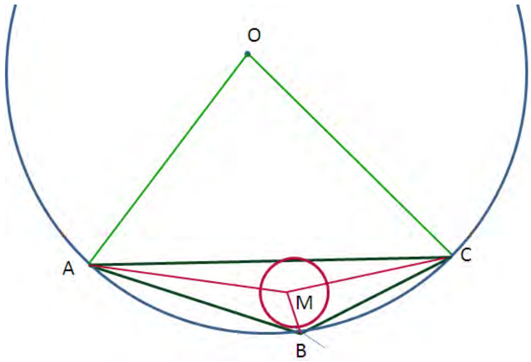


Рис.2

Рис.1: $\angle AOC = 60° \Rightarrow \angle ABC = 30° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° - 30° = 150°$; $\alpha + \beta = 75° \Rightarrow$
$\angle AMC = 180° - 75° = 105°$.
Рис.2: $\angle AOC = 60° \Rightarrow \angle ABC = 180° - 30° = 150° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° - 150° = 30°$; $\alpha + \beta = 15° \Rightarrow$
$\angle AMC = 180° - 15° = 165°$.
Ответ: 105°; 165°.

4.3.30. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника.

Решение:
Рис.1: 1) Пусть AC = 8, BC = 6, тогда гипотенуза AB = 10. CS = CP = MR = MQ = r, BS = BR по свойству касательных, тогда BM = BC = 6, AM = AB – MB = 10 – 6 = 4.
2) $\Delta ABC \sim \Delta AMN$, $\frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC} = \frac{1}{2}$, то есть MN = 3.
3) $S_{CBMN} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMN} = \frac{6\cdot 8}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} = 24 - 6 = 18$.

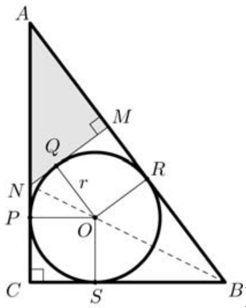


Рис.1

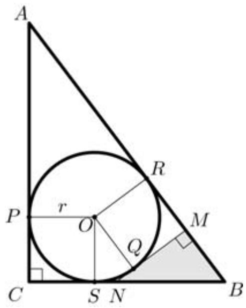


Рис. 2

Рис.2: 1)AM = AC = 8, MB = 10 – 8 = 2.

2) $\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{AC} = \frac{1}{3}$, то есть MN $= \frac{8}{3}$.

3) $S_{CBMN} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMN} = \frac{6\cdot 8}{2} - \frac{2\cdot\frac{8}{3}}{2} = 24 - \frac{8}{3} = 21\frac{1}{3}$.

Ответ: 18 или $21\frac{1}{3}$.

4.3.31. Расстояние от точки *M*, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящий через точку *M*.

Ответ: $4 + \sqrt{6}$; $4 - \sqrt{6}$;

4.3.32. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно $\frac{7}{24}$.

Решение:

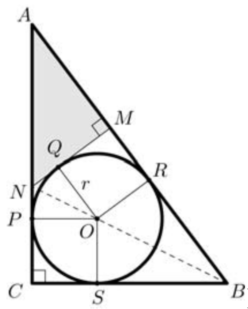


Рис.1

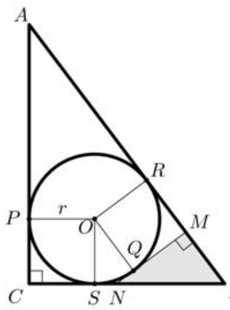


Рис. 2

Рис.1

1) Пусть CB = 7x, а AC = 24x, тогда по теореме Пифагора AB = 25x.

2) SCPO и QMRO – квадраты, тогда SO = CS = OP = PC = MR = MQ= OR = OQ = r , где r – искомый отрезок. NQ = NP, BR = BS тогда MN = NC = 14, а AN = 24x – 14; BM = BC = 7x, AM = 25x – 7x = 18x.

3) $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ по двум углам, $\frac{MN}{CB} = \frac{MA}{CA}$, $\frac{14}{7x} = \frac{18x}{24x}$; $\frac{2}{x} = \frac{3}{4}$; $x = \frac{8}{3}$.

4) В ΔABC получим: $r = \frac{CB + AC - AB}{2} = 3x = 8$.

Рис.2

1) AM = 24x, BM = x; NB = 7x – 14;

2)$\Delta ABC \sim \Delta BMN$ по двум углам, $\frac{MN}{CA} = \frac{MB}{CB}$, $\frac{14}{24x} = \frac{x}{7x}$; $\frac{7}{12x} = \frac{1}{7}$; $x = \frac{49}{12}$.

3) $r = \frac{CB + AC - AB}{2} = 3x = 3\cdot\frac{49}{12} = \frac{49}{4} = 12{,}25$.

Ответ: 8 или 12,25.

4.3.33. (ТР от 12.04.2011) Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 29, *AC* = 20, и *BC* = 21. На стороне *BC* взята точка *D*, а на отрезке *AD* –точка *O*, причем *CD* = 7 и *AO* = 3*OD*. Окружность с центром *O* проходит через точку *C*. Найдите расстояние от точки *C* до точки пересечения этой окружности с прямой *AB*.

Ответ: 14,5 и $\frac{420}{29}$. (**см. 4.3.18**)

4.3.34. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.
Ответ: 25 или 32.

4.3.35. Дан прямоугольный треугольник АВС с катетами АС= 15 и ВС = 8. С центром в вершине *B* проведена окружность *S* радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ВАС и касающийся окружности S.

Решение:

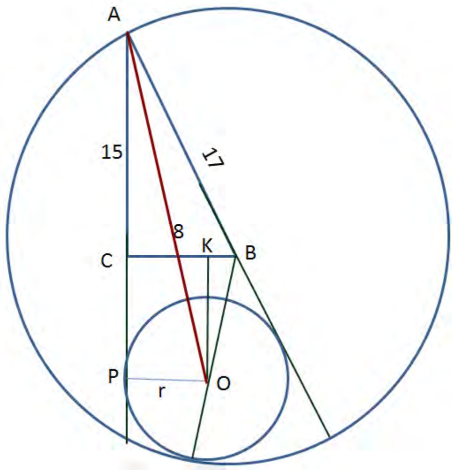


Рис. 1

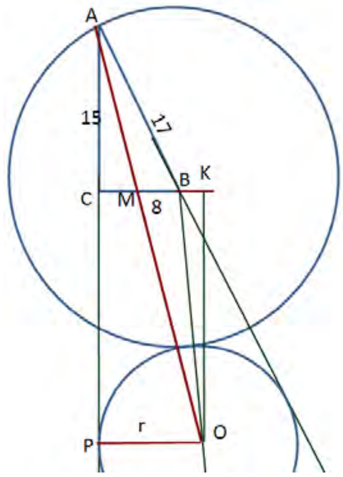


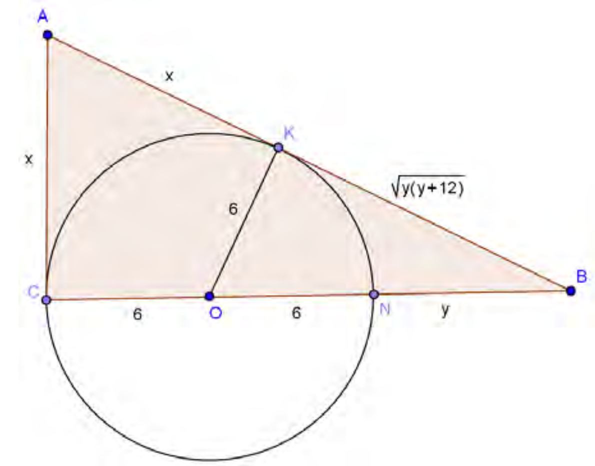
Рис. 2

Рис.1. Пусть **r** – искомый радиус.
1) По теореме Пифагора АВ= 17. АО – биссектриса $\angle$САВ, тогда по свойству биссектрисы $\frac{CM}{AC} = \frac{MB}{AB}$ или $\frac{x}{15} = \frac{8-x}{17}$, $x = \frac{15}{4}$, $CM = \frac{15}{4}$.
2) $\Delta ACM \sim \Delta APO$, тогда $\frac{CM}{OP} = \frac{AC}{AP}$, $\frac{15}{4r} = \frac{15}{AP}$, АР = 4r, СР = 4r – 15.
3) В ΔОВК ОВ = 17 – r, КВ = 8 – r, ОК = СР = 4r – 15. $(17 - r)^2 = (4r - 15)^2 + (8 - r)^2$.
$289 - 34r + r^2 = 16r^2 - 120r + 225 + 64 - 16r + r^2$; $16r^2 - 102r = 0$, $r = \frac{102}{16} = \frac{51}{8}$.
Рис.2
В ΔОВК ОВ = 17 + r, КВ = r - 8 , ОК = СР = 4r – 15. $(17 + r)^2 = (4r - 15)^2 + (r - 8)^2$.
$289 + 34r + r^2 = 16r^2 - 120r + 225 + 64 - 16r + r^2$; $16r^2 - 170r = 0$, $r = \frac{170}{16} = \frac{85}{8}$.
Ответ: $\frac{51}{8}$ или $\frac{85}{8}$.

4.3.36. Дан прямоугольный треугольник АВС с катетами АС= 5 и ВС = 12. С центром в вершине *B* проведена окружность *S* радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ВАС и касающийся окружности S.
Ответ: $\frac{52}{9}$ или $\frac{260}{9}$.

4.3.37. Прямоугольный треугольник АВС имеет периметр 54см. Окружность радиуса 6 см, центр которой лежит на катете ВС, касается прямых АВ и АС. Найти площадь треугольника АВС.

Решение:
1 способ.



1) $\Delta ABC \sim \Delta BKO$, $\frac{AC}{OK} = \frac{BC}{BK}$,

$\frac{x}{6} = \frac{12+y}{\sqrt{y(y+12)}}$, $x = 6 \cdot \sqrt{\frac{12+y}{y}}$.

2)$P_{\Delta ABC} = 2x + 12 + y + \sqrt{y(y+12)} = 54$;

$12 \cdot \sqrt{\frac{12+y}{y}} + \sqrt{y(y+12)} = 42 - y$;

$144 \cdot \frac{12+y}{y} + 24(y+12) + y(y+12) =$

$=1764 - 84y + y^2$;

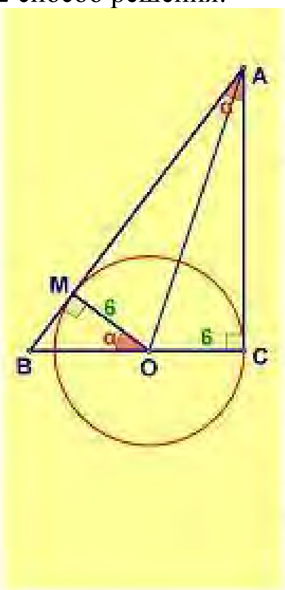
$10y^2 - 111y + 144 = 0$;

$D = 3^2 \cdot 37^2 - 4 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 9 = 9 \cdot 729$.

$y_1 = 1{,}5$, $x_1 = 18$; $y_2 = 9{,}6$, $x_2 = 9$.

$S = 121{,}5$ или $S = 97{,}2$.

2 способ решения:



$$AC = \frac{6}{tg\frac{\alpha}{2}},\ BO = \frac{6}{\cos\alpha},\ BM = 6tg\alpha,\ AM = AC = \frac{6}{tg\frac{\alpha}{2}}.$$

По условию $\frac{6}{tg\frac{\alpha}{2}} + 6 + \frac{6}{\cos\alpha} + 6tg\alpha + \frac{6}{tg\frac{\alpha}{2}} = 54$,

$$\frac{2}{tg\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\alpha} + tg\alpha = 8,$$

$$\frac{2}{tg\frac{\alpha}{2}} + \frac{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} = 8,$$

$$\frac{2}{t} + \frac{1+t^2+2t}{1-t^2} = 8$$

$\frac{2}{t} + \frac{1+t}{1-t} = 8$, $9t^2 - 9t + 2 = 0$, $t = \frac{2}{3}$ или $t = \frac{1}{3}$.

1) Если $t = \frac{2}{3}$, то $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $AC = 9$, $BC = \frac{108}{5}$,

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{108}{5} = 97{,}2.$$

2) Если $t = \frac{1}{3}$, то $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $AC = 18$, $BC = \frac{27}{2}$,

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{27}{2} = 121{,}5.$$

Ответ: $S = 121{,}5$ или $S = 97{,}2$.

4.3.38. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстоянии 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

Решение:

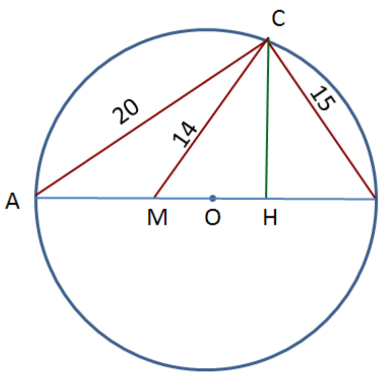


Рис. 1

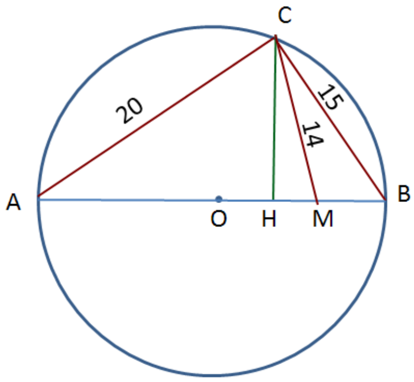


Рис. 2

1) ΔABC – прямоугольный, так как гипотенуза является диаметром окружности, тогда по теореме Пифагора $AB = 25$, а $R = 12,5$. Высота $CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$.

2) Из ΔACH $\quad AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, а $HB = 9$.

3) Из ΔCHM $\quad MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}$.

4) Рис. 1: $MB = BH + HM = 9 + 2\sqrt{13}$, $\quad S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CH = (9 + 2\sqrt{13}) \cdot 6 = 54 + 12\sqrt{13}$,

Рис. 2: $MB = BH - HM = 9 - 2\sqrt{13}$, $\quad S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CH = (9 - 2\sqrt{13}) \cdot 6 = 54 - 12\sqrt{13}$,

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$.

4.3.39. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстоянии 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.
Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}$.

4.3.40. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина *C*, на другой – основание *AB* равнобедренного треугольника *ABC* . Известно, что *AB* =10. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC* , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC* .

Решение:

1) Так как ΔABC – равнобедренный, то высота CT является медианой, тогда $AT = BT = 5$, $CT = 12$, а $CB = AC = 13$.

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CT = p \cdot r$, $\; r = O_1P = \frac{AB \cdot CT}{(AB+AC+BC)} = \frac{10 \cdot 12}{(10+13+13)} = \frac{10 \cdot 12}{36} = \frac{10}{3}$.

3)Так как вторая окружность касается параллельных прямых, то $OH = OK = 12 : 2 = 6$.

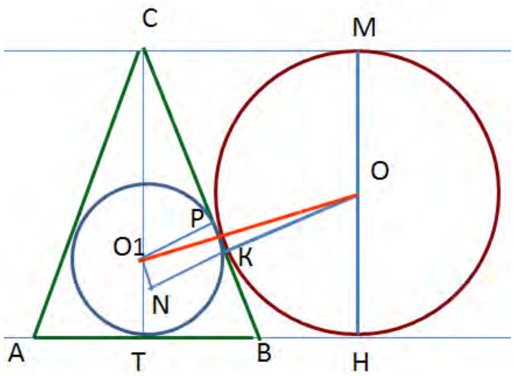


Рис. 1

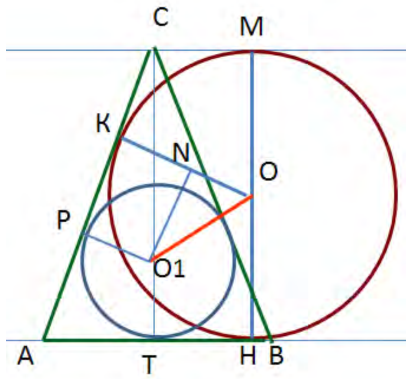


Рис. 2

4) Рис. 1: Пусть $BK = x$, по свойству касательных, проведенных из одной точки $BK = BH = x$, тогда $CK = CM = 13 - x$. Так как $CM = TH$, то $13 - x = x + 5$, $2x = 8$, $x = 4$. $BK = 4$. $PK = BP - BK = 5 - 4 = 1$.

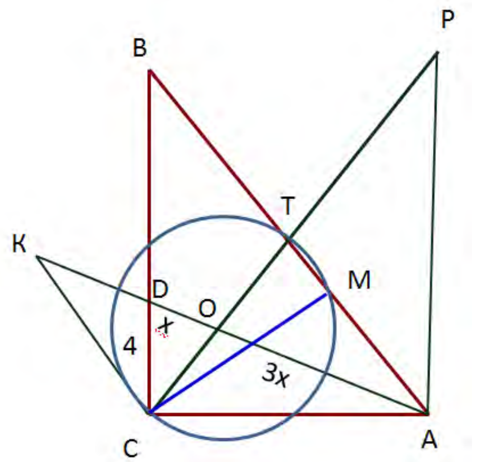
5) Построим $O_1N = PK = 1$, $\quad O_1N \parallel PK$, тогда $ON = OK + NK = OK + O_1P = 6 + \frac{10}{3} = \frac{28}{3}$.

ΔO_1NO – прямоугольный, $OO_1 = \sqrt{O_1N^2 + NO^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{28}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{793}}{3}$.
6) Рис.2: Пусть СК = СМ = x, АК = АН = 13 – x = АТ + ТН = 5 + x. x = 4.
Тогда РК = 13 – (СК + АР) = 13 – (4 + 5) = 4.
7)
Построим O_1N = РК = 4, $ON = OK - PO_1 = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$.
ΔO_1NO – прямоугольный, $OO_1 = \sqrt{O_1N^2 + NO^2} = \sqrt{16 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.
Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$

4.3.41. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина *C*, на другой – основание *AB* равнобедренного треугольника *ABC* . Известно, что *AB* =16. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC* , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC* .
Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

4.3.42. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 15, *AC* = 9, и BC = 12. На стороне *BC* взята точка *D*, а на отрезке *AD* – точка *O*, причем *CD* = 4 и *AO* = 3 ·*OD*. Окружность с центром О проходит через точку *C*. Найдите расстояние от точки *C* до точки пересечения этой окружности с прямой *AB*.

Решение:
1) Построим луч СО, пересекающий прямую АР || СВ в точке Р. Т – точка пересечения луча с гипотенузой АВ.
Δ ОАР ~ ΔОСD по двум углам: ∠РОА = ∠DОС – вертикальные, ∠СРА = ∠DСО – накрест лежащие при АР || СВ и секущей СР. Так как АО : ОD = 3 : 1, то АР = 12, тогда ΔСАР = ΔАВС по катетам, а СР = АВ = 15.
2) Построим СК || АВ, тогда ΔСDК ~ ΔАDВ по двум углам. CD : DB = 4 : 8 = 1 : 2, тогда СК = АВ : 2 = 7,5.
AD = 4x, тогда KD = 2x.
3) АРТ = ΔСТВ по стороне АР = СВ и двум прилежащим к ней углам (накрест лежащие углы), следовательно АТ = АТ = 15 : 2 = 7, 5; СТ = ТР = 7,5.



4)ΔСОК = ΔАОТ по двум сторонам АТ = СК = 7,5, ОА = ОК = 3x и углу между ними, тогда СО = ОТ, т.е. точка Т принадлежит окружности и гипотенузе –то есть СТ - искомое расстояние. СТ – медиана ΔАВС, следовательно СТ = АТ = ТВ = 7,5.
5)СМ является катетом прямоугольного треугольника СМТ, то есть ΔСМВ - прямоугольный;
ΔАВС ~ ΔСМВ, тогда АС : СМ = АВ : СВ, 9 : СМ = 15 : 12, $CM = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7{,}2$
Ответ: 7,5 или 7,2.

4.3.43. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 25, *AC* = 7, и BC = 24. На стороне *BC* взята точка *D*, а на отрезке *AD* – точка *O*, причем *CD* = 8 и *AO*=3· *OD*. Окружность с центром О проходит через точку *C*. Найдите расстояние от точки *C* до точки пересечения этой окружности с прямой *AB*.
Ответ:12,5 или 6,72.

4.3.44. В треугольнике АВС АВ = 14, ВС = 6, СА = 9. Точка D лежит на прямой ВС так, что BD : DC = 1 : 9. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение:
Рис.1: $DE = \frac{DA + DC - AC}{2}$, $DF = \frac{DB + DA - AB}{2}$. Тогда FE = DE – DF.

FE = $\frac{DA+DC-AC}{2} - \frac{DB+DA-AB}{2} = \frac{DC-AC-DB+AB}{2}$.

Так как $BD : DC = 1 : 9$, то $BD = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $DC = 5{,}4$. FE = $\frac{5{,}4-9-0{,}6+14}{2} = 4{,}9$

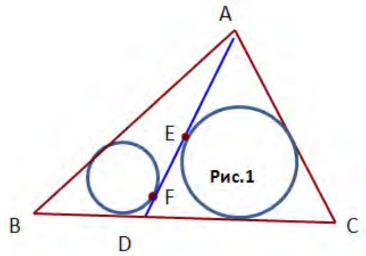
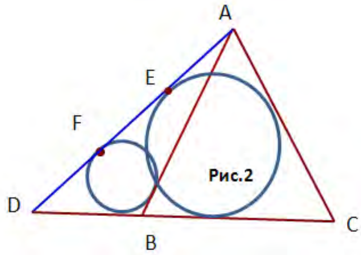


Рис.2: DE = $\frac{DA+DC-AC}{2}$, DF = $\frac{DB+DA-AB}{2}$.

FE = $\frac{DC-AC-DB+AB}{2}$. $BD = \frac{6}{8} = 0{,}75$; $BC = 6$,

$CD = 6{,}75$. FE = $\frac{6{,}75-9-0{,}75+14}{2} = 5{,}5$.



Ответ: 4,9 или 5,5.

4.3.45. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A Точка M – середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BM . Найдите угол AC_1B .

Решение:

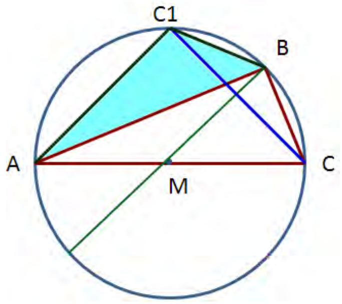


Рис. 1

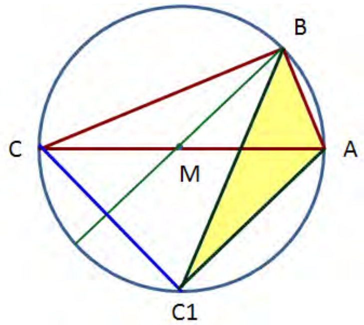


Рис.2

1) Так как Δ ABC – прямоугольный, а точка M – середина гипотенузы, то точка C_1 симметричная точке C относительно прямой BM, находится на окружности с центром в точке M и радиусом BM.

2) $\angle AC_1B$ – вписанный в окружность и опирается на дугу

Рис.1. $\cup ACB = \cup AC + \cup BC = 180^0 + 2\alpha$, тогда $\angle AC_1B = 90^0 + \alpha$;

Рис. 2. $\angle AC_1B$ опирается на $\cup AB = 2\alpha$, тогда $\angle AC_1B = \alpha$.

Ответ: $90^0 + \alpha$; α.

4.3.46. Дан треугольник ABC с основанием AB = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и высотой CH = $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Известно, что AH: HB = 2:1. В угол BAC вписана окружность, с центр которой лежит на высоте CH. Найдите радиус окружности.

Решение:

1 вариант (Рис. 1) Точка H принадлежит отрезку AB.

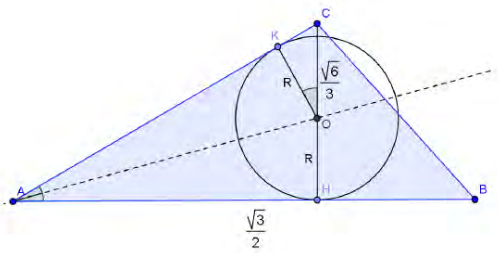


Рис. 1

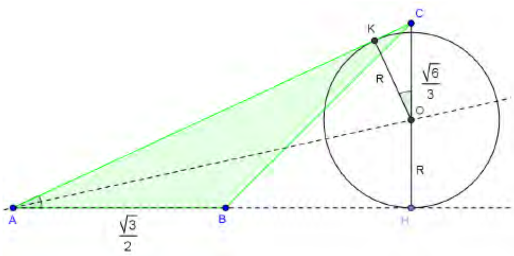


Рис. 2

1)Так как AH : HB = 2 : 1, то AH = $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. По теореме Пифагора из ΔACH AC = 1.

2) По свойству касательных AK = AH = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, тогда CK = 1 - $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) Δ COK – прямоугольный, $OC^2 = OK^2 + KC^2$; $(\frac{\sqrt{6}}{3} - R)^2 = R^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})^2$. $\frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}$.

R = $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)}{6}$.

2 вариант (Рис. 2) Точка Н лежит на продолжении отрезка АВ.

1) Так как АН : НВ = 2 : 1, то АН =2$\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. По теореме Пифагора из ΔАСН АС = $\frac{\sqrt{33}}{3}$.

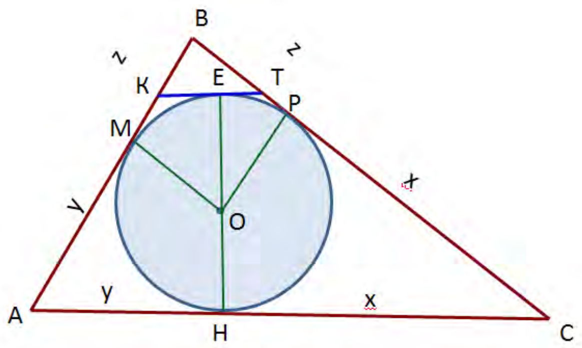
2) СК = $\frac{\sqrt{33}}{3}-\sqrt{3}$. $(\frac{\sqrt{6}}{3}-R)^2=R^2+(\frac{\sqrt{33}}{3}-\sqrt{3})^2$. $\frac{2R\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{11}-6$, R = $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{11}-3)}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)}{6}$ или $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{11}-3)}{2}$.

4.3. 47. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

Решение:

1) По свойству касательных АН = АМ = y,
CH = CP = x, BP = BM = z.
Тогда 2x + 2y + 2z = 18, x + y + z = 9.
2) МК = КЕ, ТР = ТЕ, тогда МК + ТР = КТ = 2.
2 z = MB + BP = MK + KB + BT + TP,
2 z = 2 + KB + BT.
3) ΔАВС ~ ΔВТК, тогда $\frac{AC}{KT}=\frac{AB}{KB}=\frac{CB}{PB}$.
$\frac{x+y}{2}=\frac{y+z}{KB}$, КВ = $\frac{2(z+y)}{x+y}$, $\frac{x+y}{2}=\frac{x+z}{TB}$, ТВ = $\frac{2(z+x)}{x+y}$

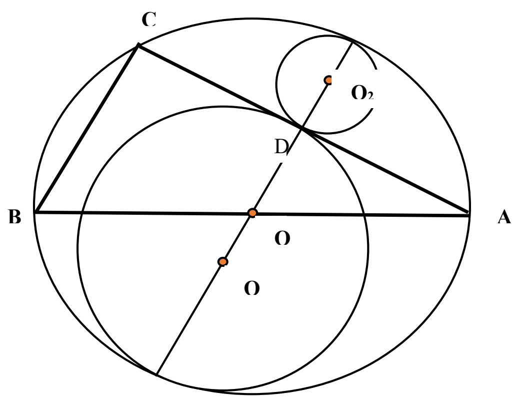


4) 2 z = 2 + $\frac{2(z+y)}{x+y}+\frac{2(z+x)}{x+y}$, z = $\frac{x+y+z+y+z+x}{x+y}=\frac{18}{x+y}$, тогда получим уравнение:
x + y + $\frac{18}{x+y}$ = 9, $(x+y)^2-9(x+y)+18=0$; x+ y = 3 или x+ y = 6.
Так как x+y = АС, то АС = 3 или АС = 6.
Ответ: 3 или 6.

4.3.48. (ТВ№39-2013, А. Л.) На окружности радиуса 3 с центром в вершине острого угла А прямоугольного треугольника АВС взята точка Р. Известно, что АС=3, ВС=8, а треугольники АРС и АРВ равновелики. Найдите расстояние от точки Р до прямой ВС, если известно, что оно больше 2.
Ответ: 3 и $\frac{24}{5}$

4.3.49. В треугольнике *ABC AC*=12, *BC*=5, *AB*=13. Вокруг этого треугольника описана окружность *S*. Точка *D* является серединой стороны *AC*. Построена окружность S_1, касающаяся окружности *S* и отрезка *AC* в точке *D*. Найдите радиус окружности S_1.

- *Решение.*



12, 5, 13 – пифагоровы числа, следовательно, ΔACB – прямоугольный, с гипотенузой *AB*. В таком случае АВ – диаметр окружности *S*. Значит, радиус этой окружности $R=\frac{AB}{2}=\frac{13}{2}$.

Через точку D можно провести две окружности, удовлетворяющие условию задачи.

Пусть О – центр окружности *S*. Проведем прямую через точки O и D. Очевидно, что прямая OD - ось симметрии как окружности *S,* так и искомых окружностей.

Следовательно, точки O_1, O_2 - центры искомых окружностей, лежат на прямой OD .

Хорда *AC* окружности *S* делит круг окружности *S* на два сегмента, половина высот которых являются искомыми радиусами

Вычислим эти высоты по формуле $h = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$, где l – длина хорды, в нашем случае $l = AC$=12.

$R = \frac{13}{2}$. $h = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} = \frac{13 + 5}{2}$. $h_1 = 9$, $r_1 = 4{,}5$. $h_2 = 4$, $r_1 = 2$.

Ответ: 2 или 4,5.

Высота сегмента также может быть вычислена по формулам:

$h = R \cdot \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ - через радиус окружности и центральный угол;

$h = \frac{1}{2} l \cdot tg\frac{\alpha}{4}$ - через хорду и центральный угол.

4.3.50. (ТВ№21-2013 от А.Л.) На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.

Решение:

Так как окружность делит боковую сторону на отрезки 1 и 2 , то длина боковой стороны равна 3.

1) ΔABC: AB = AC = 3, AM = 2, MC = 1.

∠BMA = 90°, как угол, опирающийся на диаметр AB.

$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, тогда

$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{5 + 1} = \sqrt{6}$.

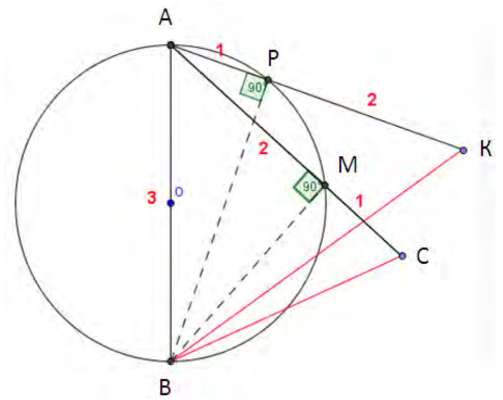
2) 1) ΔABK: AB = AK = 3, AP = 1, PK = 2.

∠BPA = 90°, как угол, опирающийся на диаметр AB.

$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$, тогда

$BK = \sqrt{BP^2 + PK^2} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

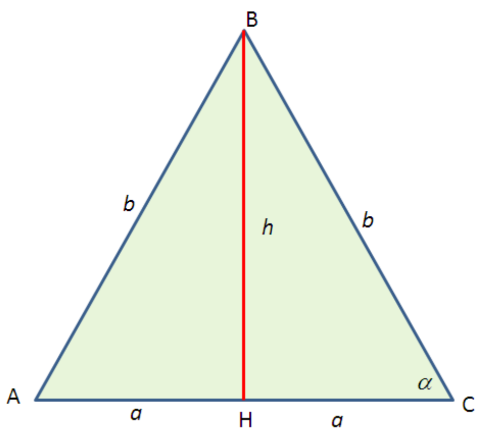
Ответ: $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$.



4.3.51. (ТВ 24-2013, АЛ.)Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

Решение: (Найдено 6 способов решения этой задачи)

1 способ:(мой)



Пусть R – радиус описанной окружности, а r - радиус вписанной окружности.

1) $S_{ABC} = \frac{2ab^2}{4R} = \frac{2a+2b}{2} \cdot r$, или $\frac{ab^2}{2R} = (a + b)$ r. (∗)

2) $\frac{b}{sin\alpha} = 2R \Rightarrow$ b = 2Rsinα;

$a = b$ cosα = 2Rsinαcosα;

3) Подставим найденные значения a и b в (∗):

$\frac{2R\sin\alpha\cos\alpha \cdot 4R^2 sin^2\alpha}{2R}$ = (2Rsinαcosα +2Rsinα) r;

$4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha = 2R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)r$;

$2R(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = (1+\cos\alpha)r$; $2R\cos\alpha(1-\cos\alpha) = r$;

$2R\cos^2\alpha - 2R\cos\alpha + r = 0$.

Решим как квадратное относительно cosα:

1) $\cos\alpha = \frac{R - \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \frac{25 - \sqrt{25^2 - 24 \cdot 25}}{50} = \frac{25 - 5}{50} = \frac{2}{5}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $a = 50 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{2}{5} = 4\sqrt{21}$; $b = 10\sqrt{21}$;

$AB = BC = 10\sqrt{21}$; $AC = 8\sqrt{21}$.

2) $\cos\alpha = \frac{R + \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \frac{25 + \sqrt{25^2 - 24 \cdot 25}}{50} = \frac{25 + 5}{50} = \frac{3}{5}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $a = 50 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 24$; $b = 40$;

AB = BC = 40; AC = 48.
Ответ: $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$; 40, 40, 48.

2 способ:(мой)

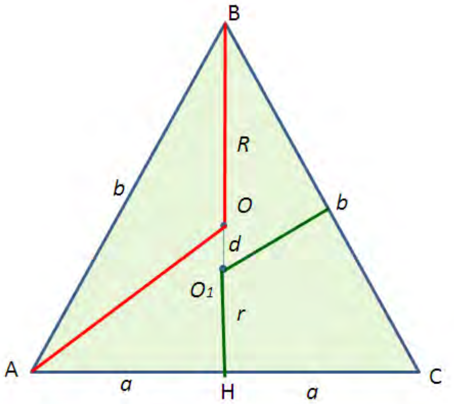


Рис.1

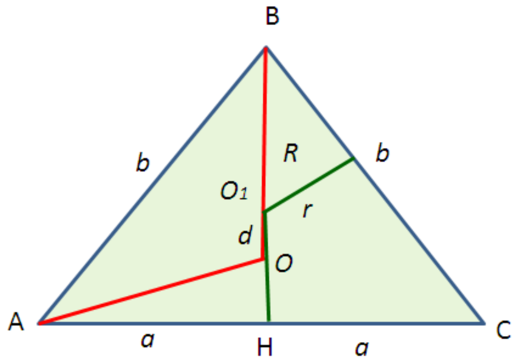


Рис. 2

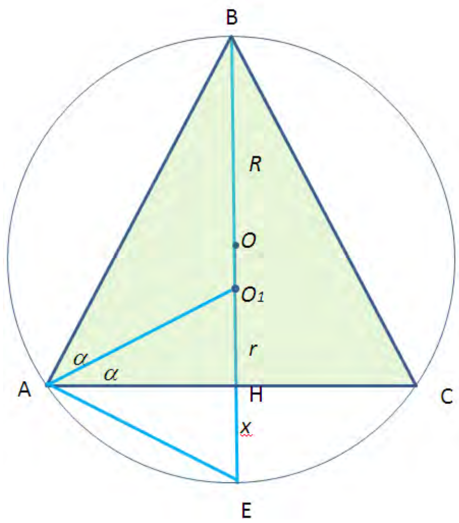
1) По формуле Эйлера, найдем расстояние между центрами описанной O и вписанной O_1 окружностями:
$OO_1 = d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = \sqrt{25^2 - 25 \cdot 24} = 5$

Рис.1: BH = h = R + d + r = 25+5+12 = 42. $S_{ABC} = a \cdot h = \frac{ab^2}{2R}$; $42 = \frac{b^2}{50}$; $b = 10\sqrt{21}$,
$a = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{100 \cdot 21 - 4 \cdot 21^2} = 4\sqrt{21} \Rightarrow AB = BC = 10\sqrt{21}$; $AC = 8\sqrt{21}$.

Рис.2: BH = h = R - d + r = 25 - 5+12 = 32. $S_{ABC} = a \cdot h = \frac{ab^2}{2R}$; $32 = \frac{b^2}{50}$; $b = 10 \cdot 4 = 40$,
$a = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{8 \cdot 72} = 8 \cdot 3 = 24 \Rightarrow AB = BC = 40$; AC = 48.

Ответ: $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$; 40, 40, 48.

3 способ(от М.И.Сканави)



1) BE – диаметр окружности , BE = 50; $\angle BAE = 90°$ - как угол, опирающийся на диаметр. $BE \perp AC$, так как ΔABC – равнобедренный.
2) Пусть $\angle BAO_1 = \angle HAO_1 = \alpha$, тогда $\angle AO_1E = 90° - \alpha$, $\angle ABE = 90° - 2\alpha$, а $\angle AEH = 2\alpha \Rightarrow \angle EAH = 90° - 2\alpha$ и $\angle EAO_1 = 90° - \alpha$, т.е ΔAEO_1 равнобедренный,
$AE = EO_1 = 12 + x$.
3) По свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике $AE^2 = BE \cdot EH$, $(12 + x)^2 = 50x$; $x^2 - 26x + 144 = 0$, $x_1 = 13 + 5 = 18$; $x_2 = 13 - 5 = 8$.
4)При x = 18, AE = 18 + 12 = 30,
$AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{12 \cdot 48} = 24$,
AC = 48.
$AB = \sqrt{BE^2 - EA^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{20 \cdot 80} = 40$.

При x = 8, AE = 20, $AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{20^2 - 8^2} = \sqrt{12 \cdot 28} = 4\sqrt{21}$. $AC = 8\sqrt{21}$;
$AB = \sqrt{BE^2 - EA^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{30 \cdot 70} = 10\sqrt{21}$.
Ответ: $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$; 40, 40, 48.

4 способ

С4. Дано:

ΔABC - равнобедр.

$R = 25$ $r = 12$.

Найти AB, BC, AC

Ответ(1): $AB = BC = 40$

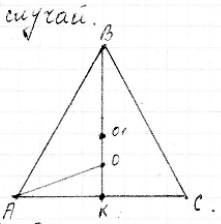
$AC = 48$.

Ответ(2): $AB = BC = 10\sqrt{21}$

$AC = 8\sqrt{21}$

Решение:

1) случай.



Пусть. O (ц. описанои окр) расположена ниже O1 (ц. впис окр). 1). По форму ле эйлера найдем O1O $O1O = \sqrt{R^2 - 2rR} = \sqrt{25} = 5$.

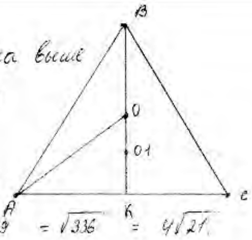
из ΔAOK найдем AK: $OK = O1K(r) - O1O = 12 - 15 = 7$.

$OA = R = 25$ $\angle K = 90^\circ$ (т.к BK - биссектр медиана и $\boxed{\text{высота}}$, а $OK \in BK$. Тогда $AK^2 = AO^2 - OK^2 = 625 - 49 = 576$ - тогда $AK = 24$. 2) из ΔABK найдем AB; $BK = BO + OK = 25 + 7 = 32$ $AK = 24$ $\angle K = 90^\circ$

$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$; 3). Т.К ΔABC равнобедренный, а BK - биссектр. медиана и высота то $AC = 2AK = 24 \cdot 2 = 48$; $AB = BC = 40$

2 случай:

Пусть точка O расположена выше O1. 1) Аналогично 1 случаю из ΔAOK найдем AK.



$OK = OO1 + O1K = 12 + 5 = 17$

$AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{625 - 289} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$.

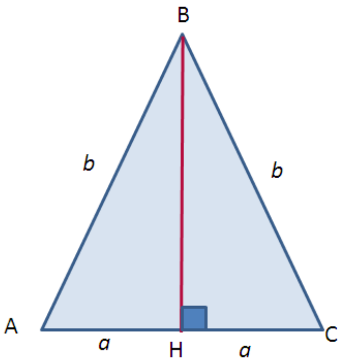
2). из ΔABK найдем AB; $BK = BO + OK = 25 + 17 = 42$. $AB = \sqrt{BK^2 + AK^2} = \sqrt{1764 + 336} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$

3) Зная, что ΔABC равнобедренный и что BK - биссектриса медиана и высота Получаем: $AC = 2AK = 8\sqrt{21}$ $AB = BC = 10\sqrt{21}$

P.S Точки O и O1 могут лежать только на прямой BK т.к BK является и биссектр и серед. перпендикуляром то есть тек пересеч. бисс. и серед перп (т.е центры впис. и опис окр.) будут лежать на ней. P.P.S точки O и O1 не могут совп. так как тогда бы ΔABC был правильным, что противоречит условию.

Ответ: 40, 40, 48; $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$.

5 способ:



1) $BH = \sqrt{b^2 - a^2}$, $S = a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$.

2) $S = \frac{2a\,b^2}{4R} \Rightarrow R = \frac{2a\,b^2}{4S} = \frac{2a\,b^2}{4a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}$, где R = 25 – радиус описанной окружности. Получим $\frac{b^2}{2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}} = 25$ (1)

3) $S = \frac{2a + 2b}{2} \cdot r$, $r = \frac{S}{a+b} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b}$, где $r = 12$ – радиус вписанной окружности. Получим: $\frac{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b} = 12$ (2).

4) Разделим равенство (1) на (2):

$\frac{b^2\,(b+a)}{2 \cdot (b^2 - a^2) \cdot a} = \frac{25}{12}$, $\frac{b^2}{(b\ \ -a\ \ ) \cdot a} = \frac{25}{6}$; $6b^2 = 25ab - 25a^2$, $25a^2 - 25ab + 6b^2 = 0$ - однородное алгебраическое уравнение, где ни a ни b равными нулю быть не могут. Разделим обе части уравнения на b^2, и дробь $\frac{a}{b}$ обозначим через t и получим: $25t^2 - 25t + 6 = 0$, $t_1 = \frac{3}{5}$, $t_2 = \frac{2}{5}$.

- $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $a = \frac{3}{5}b$, $\frac{b^2}{2 \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{3}{5}b\right)^2}} = 25$, $\frac{b^2}{2 \cdot \frac{4}{5}b} = 25$, $b = 25 \cdot \frac{8}{5} = 40$, $a = \frac{3}{5} \cdot 40 = 24$.

  AB = BC = 40, AC = 48.
- $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, $a = \frac{2}{5}b$, $\frac{b^2}{2 \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{2}{5}b\right)^2}} = 25$, $\frac{b^2}{2 \cdot b \frac{\sqrt{21}}{5}} = 25$, $b = 25 \cdot \frac{2\sqrt{21}}{5} = 10\sqrt{21}$.

  $AB = BC = 10\sqrt{21}$, $AC = 8\sqrt{21}$.

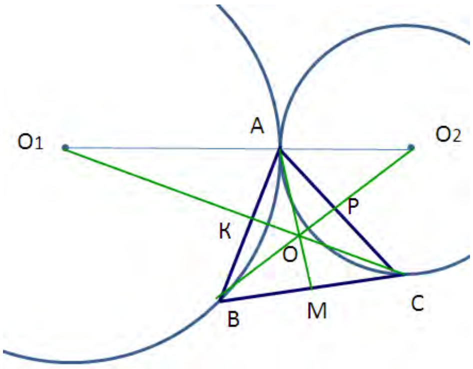
  Ответ: 40, 40, 48; $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $8\sqrt{21}$.

6 способ: См. файл PDF C4 ТР №24 (от А. Ларина)

4.3.52. (ТВ№29-2013, А. Л.) Окружности радиусов 2 и 1 касаются в точке А. Найдите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке А, а две другие лежат на разных окружностях.

Решение:

1 случай: окружности касаются внешним образом.



1) Построим медианы ΔABC, они же будут высотами и биссектрисами треугольника. $\angle O_1OO_2 = 120°$. OA биссектриса $\angle O_1OO_2$ $\Rightarrow \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{O_1O}{O_2O} = \frac{2}{1}$. Пусть $O_2O = x$, а $O_1O = 2x$, тогда по теореме косинусов имеем:

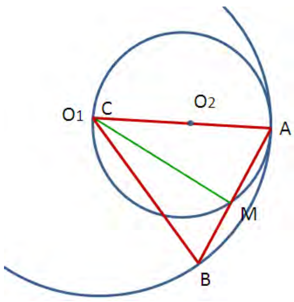
$O_1O_2^2 = O_1O^2 + OO_2^2 - 2\, O_1O\cdot OO_2\cdot \cos 120° = 5x^2 + 2x^2 = 7x^2$.

$7x^2 = 9$, $x^2 = \frac{9}{7}$, $x = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, т.е. $O_2O = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

2) $\angle AOO_2 = 60°$, тогда по теореме косинусов из ΔAOO_2 имеем $AO_2^2 = AO^2 + OO_2^2 - 2AO\cdot OO_2\cdot \cos 60°$;

$1 = AO^2 + \frac{9}{7} - AO\cdot \frac{3}{\sqrt{7}}$; $AO^2 - AO\cdot \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{2}{7} = 0$; $D = \frac{9}{7} - \frac{8}{7} = \frac{1}{7}$. $AO = \frac{\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ или $AO = \frac{\frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

$AP = AO \cdot \cos 30° = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$; $\boxed{AC = AB = BC = \frac{2\sqrt{21}}{7}}$; или $AP = = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{14}$; $\boxed{AC = AB = BC = \frac{\sqrt{21}}{7}}$.



2 случай: окружности касаются внутренним образом.

Из вершины С ΔABC построим высоту, тогда точка М середина АВ, соединим O_1 с точкой М. Так как радиус окружности, проходящий через середину хорды перпендикуляри ей, то точка С совпадает с точкой O_1. То есть $AO_1 = AC = AB = BC = BO_1 = 2$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; $\frac{\sqrt{21}}{7}$; 2.

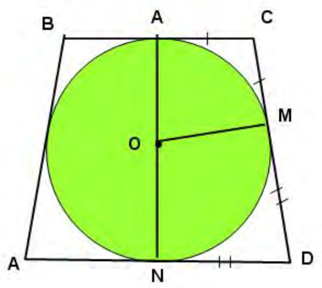
4.4. Окружность и четырехугольник на ОГЭ

Взаимное расположение окружности и четырехугольника:

- *Трапеция вписана в некую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*
- *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.*
- *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*
- *Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны.*

4.4.1. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

Решение:



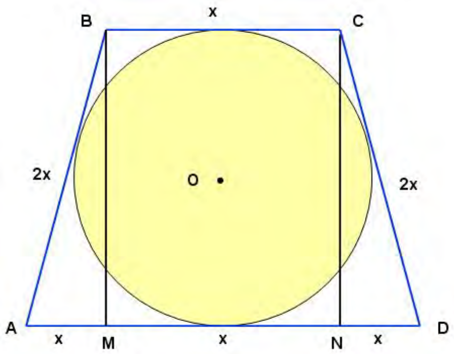
AB = CD = 10, DM = ND, MC = CA $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ND + CA = 10. h = OA + ON = 4 + 4 = 8
$S_{тр}$ = 0,5 (AD + BC) h = 10 · 8 = 80

Ответ: 80.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1. Свойство описанной трапеции;
2) Свойства равнобедренной трапеции;
3) Свойства касательных.

4.4.2. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности. (Демовариант_04)

Решение:

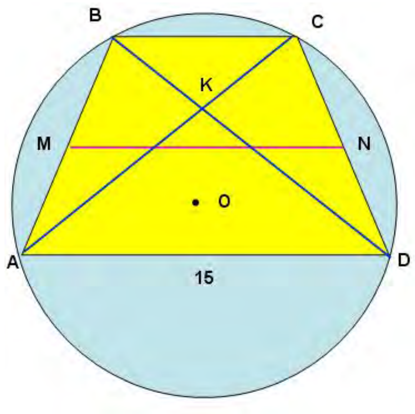


Так как трапеция равнобедренная и описанная, то BC + AD = AB + CD. $\angle$BAM = 60° $\Rightarrow$
$\angle$ABM = 30°, тогда, если AM = x, то AB = 2x $\Rightarrow$
CD = 2x $\Rightarrow$ BC + AD = 2x + 2x = 4x, тогда
$S_{тр}$ = 0,5 (BC + AD) · BM = 0,5 · 4x · BM;
Из Δ ABM найдем BM: BM = 2x · sin 60° = x $\sqrt{3}$
S тр = 2x · BM = 2x^2 $\sqrt{3}$ = $24\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ x = $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$
BM = x $\sqrt{3}$ = $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ = 6 $\Rightarrow$ r = 3.

Ответ: 3.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство описанного четырехугольника; 2) формулы площади трапеции; 3) свойства равнобедренной трапеции; 4) свойство катета, лежащего против угла 30 °; 5) соотношения между углами и сторонами прямоугольного треугольника.

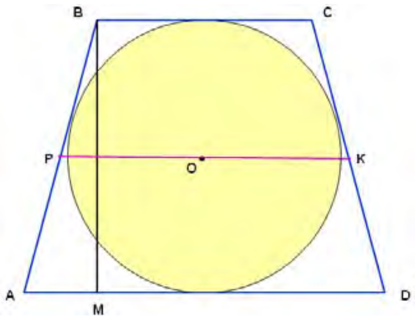
4.4.3. Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.
(Демовариант_06).



Решение
1. Средняя линия MN = 0,5·(AD + BC)
2. По теореме синусов BK : sin $\angle$BAK = AK : sin $\angle$ABK,
BK : $\frac{1}{3}$ = AK : $\frac{5}{9}$, BK = 0,6 AK.
3.$\triangle$ AKD ~ $\triangle$ BKC $\Rightarrow$ BC : AD = BK : AK = 0,6 $\Rightarrow$ BC = 9.
4. Средняя линия MN = 0,5·(AD + BC) = 0,5 (15 + 9) = 12.
Ответ: 12.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойства вписанной трапеции; 2) свойства равнобедренной трапеции; 3) признаки подобия; 4) средняя линия трапеции.

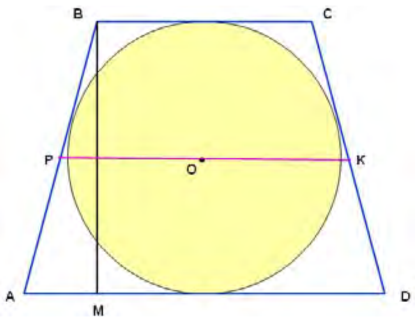
4.4.4. Равнобедренная трапеция описано около окружности радиуса $3\sqrt{5}$. Найдите тангенс угла при большем основании трапеции, если её средняя линия равна 15.



Решение:
1) По свойству описанного четырехугольника
$2 \cdot AB = AD + BC$, или $AB = 15$. $BM = 2 \cdot r = 6\sqrt{5}$
2) По теореме Пифагора
$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{225-45} = 6\sqrt{5}$
3) $\text{tg}\, A = MB : AM = 6\sqrt{5} : 6\sqrt{5} = 1$
Ответ: 1.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство описанного четырехугольника; 2) соотношения между сторонами прямоугольного треугольника; 3) свойство равнобедренной трапеции.

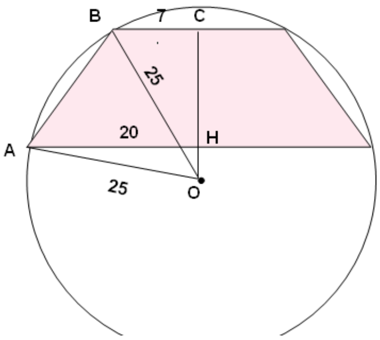
4.4.5. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 3, если тангенс угла при основании трапеции равен $\frac{3}{\sqrt{7}}$.



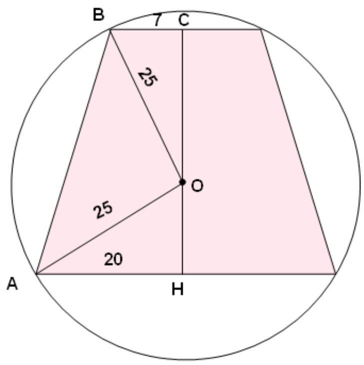
Решение:
1) По свойству описанного четырехугольника
$2 \cdot AB = AD + BC$, или $AB = PK$. $BM = 2 \cdot r = 6$
2) $\text{tg}\, A = MB : AM = 6 : AM = \frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow AM = 2\sqrt{7}$
3) По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{28+36} = 8 \Rightarrow$
$PK = 8$
Ответ: 8.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ
1) свойство описанного четырехугольника; 2) соотношения между сторонами прямоугольного треугольника; 3) свойство равнобедренной трапеции.

4.4.6. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.



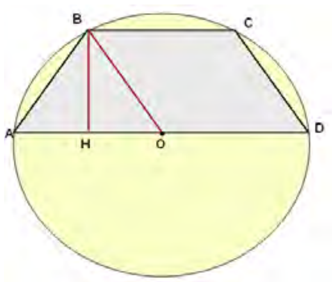
Решение:
1 случай: Трапеция расположена по одну сторону от центра окружности.
Из ΔBCO, $CO = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{625-49} = 24$;
Из ΔAHO, $HO = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{625-400} = 15$;
Тогда $CH = 9$.



2 случай: Центр окружности расположен внутри треугольника.
Из ΔBCO, $CO = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{625-49} = 24$;
Из ΔAHO, $HO = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{625-400} = 15$;
Тогда $CH = 39$.

Ответ: 9; 39.

4.4.7. (2010) Около трапеции *ABCD* описана окружность радиуса 6 с центром на основании *AD*. Найдите площадь трапеции, если основание *BC* равно 4.



Решение:

1) Так как трапеция вписана, то AB = CD, так как $O \in AD$, то AD = 12, тогда AH = 0,5 ·(AD – BC) = 4, а OH = 2.

Из ΔOBH по теореме Пифагора BH = $\sqrt{BO^2 - OH^2}$

BH = $4\sqrt{2}$.

Ответ: $32\sqrt{2}$.

4.4.8. (ТР от 08.05.2011 онлайн – турнир ЕГЭ) Окружность диаметром $\sqrt{10}$ проходит через вершины A и B прямоугольника ABCD, а касательная к ней, проведенная из точки C, равна3. Найдите BC, если AB = 1.

Решение:

Возможны два варианта расположения прямоугольника и окружности Рис. 1 и Рис.2.
Так как отрезки касательных, проведённых из одной точки равны, то не имеет значения, как построить касательную: выше точки B или ниже.

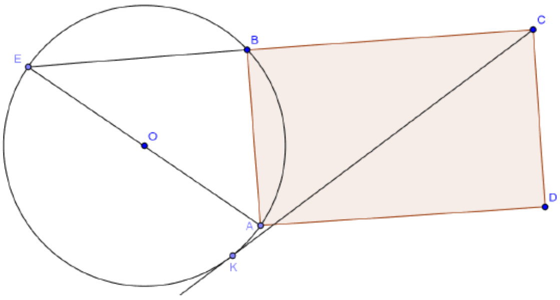


Рис.1

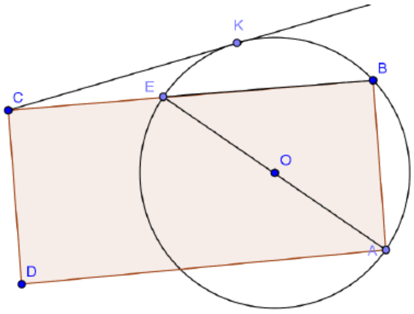


Рис.2

1)Построим треугольник ABE. Так как AE – диаметр окружности, то $\angle B = 90°$.

AB = 1, AE = $\sqrt{10}$, BE = 3, CK = 3. Пусть CB = x.

2) По свойству секущей CB и касательной CK получим: CB ·CE = CK^2

Рис.1: $x \cdot (x + 3) = 3^2$; $x^2 + 3x – 9 = 0$, $x = \frac{3\sqrt{5}-3}{2}$.

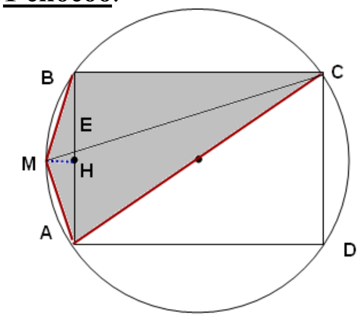
Рис. 2: $x \cdot (x - 3) = 3^2$; $x^2 - 3x – 9 = 0$, $x = \frac{3\sqrt{5}+3}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$ или $\frac{3\sqrt{5}+3}{2}$.

4.4.9. Около прямоугольника ABCD описана окружность. На окружности взята точка M, равноудаленная от вершин A и B. Отрезки MC и AB пересекаются в точке E. Найдите площадь четырехугольника AMBC, если ME = 2 см, EC = 16 см.

Решение:

1 способ.



1) По условию, AM = MB, т.е. медиана MH – высота ΔAMB;
ΔMEH ~ ΔBEC как прямоугольные и по вертикальным углам, тогда EH : BE = EM : EC = 2 : 16. То есть, если EH = x, то
BE = 8x, HB = 9x, AB = 18x.

2) По свойству хорд имеем: AE · BE = ME · EC = 2 · 16 = 32,

$10x \cdot 8x = 32$, $x = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $AB = 18\frac{\sqrt{10}}{5}$, $BE = 8\frac{\sqrt{10}}{5}$.

3) Из ΔMEH по теореме Пифагора получим $MH = 3\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, тогда

$S_{AMB} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot MH = \dfrac{1}{2}\cdot 18\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot 3\dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{54}{5}$.

4) Из ΔBEC по теореме Пифагора получим $BC = 24\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, тогда

$S_{ACB} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \dfrac{1}{2}\cdot 18\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot 24\dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{432}{5}$.

5) $S_{AMBC} = S_{AMB} + S_{ACB} = \dfrac{54}{5} + \dfrac{432}{5} = \dfrac{486}{5}$

<u>2 способ</u>:

1) пусть $\angle BEC = \alpha$, тогда $S_{AMBC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot MC\cdot \sin\alpha$;

2) Из ΔBEC, $BE = 16\cos\alpha$, Из Δ MEH, $EH = 2\cos\alpha$, тогда $HB = 18\cos\alpha$, $AB = 36\cos\alpha$, $AE = 20\cos\alpha$, а $S_{AMBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 36\cos\alpha\cdot 18\cdot \sin\alpha = 18\cdot 18\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

3) По свойству хорд имеем: $AE\cdot BE = ME\cdot EC = 2\cdot 16 = 32$, то есть $20\cos\alpha\cdot 16\cos\alpha = 32$,

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha = 3\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

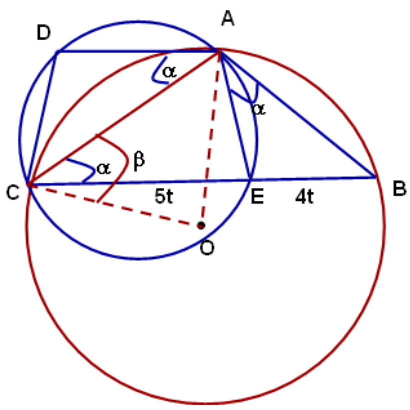
4) $S_{AMBC} = 18\cdot 18\cdot 3\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{10} = \dfrac{486}{5}$

Ответ: 97,2.

4.4.10. На основании ВС трапеции ABCD взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если AB = 12 и BE : EC = 4 : 5.

<u>Решение</u>:

1) Пусть $\angle CAB = \alpha$, а $\angle OCA = \beta$, тогда $\angle DAC = \alpha$ как накрест лежащий при $CB \parallel DA$ и секущей AC, а $\angle ACD = 90° - \beta$ ($CD \perp OC$, так как CD – касательная к окружности с центром в точке O), соответствующая этому углу дуга AC равна $2\cdot(90° - \beta)$, а



$\angle CBA = (90° - \beta)$, как угол, опирающийся на ту же дугу в окружности с центром O.

2) $\angle DCE = \angle ACD + \angle ACE = 90° - \beta + \alpha$, тогда, так как трапеция AECD – вписана в окружность, то она равнобедренная и углы при основании равны, $\angle DCE = \angle AEC = 90° - \beta + \alpha$, а смежный ему $\angle AEB = 90° + \beta - \alpha$.

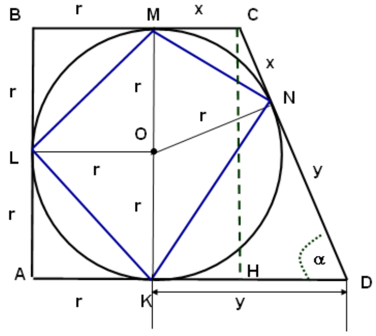
$\angle EAB = 180° - (90° + \beta - \alpha + 90° - \beta) = \alpha$

3) $\Delta ACB \sim \Delta AEB$ по двум угла, тогда $AB : CB = BE : AB$ или $12 : 9t = 4t : 12$, $t^2 = 144 : 36 = 4$, $t = 2$, $CB = 18$.

Ответ: 18.

4.4.11. В прямоугольную трапецию ABCD вписана окружность, которая касается сторон трапеции в точках K, L, M, N. Найти $\frac{CB}{AD}$, если площадь четырехугольника KLMN относится к площади трапеции как 3 : 10.

Решение:



1) $\frac{CB}{AD} = \frac{r+x}{r+y}$; 2) По условию $S_{KLMN} : S_{тр} = 3 : 10$;

3) Так как четырехугольник KLMN – вписанный, то $\angle KLM = \angle MNK = 90°$ - как углы, опирающиеся на диаметр окружности; $S_{тр.} = (2r + x + y)\cdot r$; $S_{KLMN} = S_{KLM} + S_{KMN}$;

$S_{KLM} = r^2$; По теореме косинусов

$MN^2 = 2r^2 - 2r^2\cdot\cos\alpha = 2r^2(1 - \cos\alpha)$;

$KN^2 = 2r^2 + 2r^2\cdot\cos\alpha = 2r^2(1 + \cos\alpha)$; Тогда $S_{KMN} = r^2\sin\alpha$

$S_{KLMN} = r^2 + r^2\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{2r}{x+y}$, тогда $S_{KLMN} = r^2 + \frac{2r^3}{x+y}$;

4) Из пункта 2) следует, что $3\cdot S_{тр} = 10\cdot S_{KLMN}$ или $3\cdot(2r + x + y)\cdot r = 10\cdot\left(r^2 + \frac{2r^3}{x+y}\right)$;

Пусть $x + y = t$, $3rt^2 - 4r^2t - 20r^3 = 0$, $D = 64r^4$, $t = \frac{10}{3}r$, то есть $x + y = \frac{10}{3}r$.

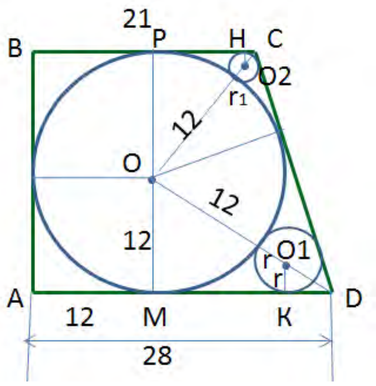
5) Из ΔCHD по теореме Пифагора имеем: $y - x = \sqrt{(x+y)^2 - 4r^2} = \sqrt{\frac{100}{9}r^2 - 4r^2} = \frac{8}{3}r$;

$\begin{cases} y + x = \frac{10}{3}r \\ y - x = \frac{8}{3}r \end{cases}$, $y = \frac{9}{3}r$, $x = \frac{1}{3}r$. Тогда $\frac{CB}{AD} = \frac{r+x}{r+y} = \frac{4}{3} : \frac{12}{3} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

4.4.12. Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.

Решение:



I случай: Рассмотрим окружность с центром в точке O_1 и радиусом r.

1)MD= AD – AM = 28 – 12 = 16. Тогда $OD = \sqrt{OM^2 + MD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

2) $\Delta OMD \sim \Delta O_1KD$, $\frac{r}{OM} = \frac{DO_1}{OD}$, $\frac{r}{12} = \frac{8-r}{20}$,

$20r = 96 - 12r$, $32r = 96$, $r = 3$.

II случай; Рассмотрим окружность с центром в точке O_2 и радиусом r_1.

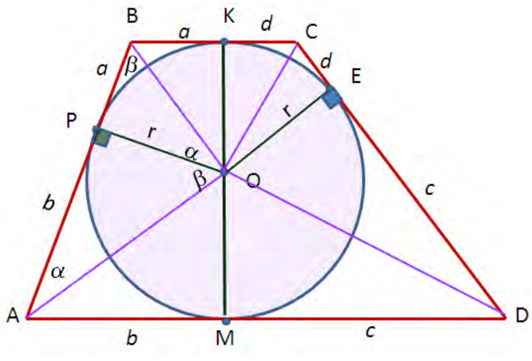
1) $PC = BC - BP = 21 - 12 = 9$, $OC = \sqrt{OP^2 + PC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

2) $\Delta OPC \sim \Delta O_2HC$, $\frac{r_1}{OP} = \frac{CO_2}{OC}$, $\frac{r_1}{12} = \frac{3-r}{15}$, $15r_1 = 36 - 12r_1$, $27r_1 = 36$, $r = \frac{4}{3}$.

Ответ: 3 или $\frac{4}{3}$.

4.4.13. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.
Ответ: 6 или $\frac{8}{3}$.

4.4.14. (ЮФМЛ)Трапеция ABCD описана вокруг окружности и её основания AD и BC касаются окружности в точках M и K соответственно. Доказать, что AM : MD = CK : KB.
Решение:

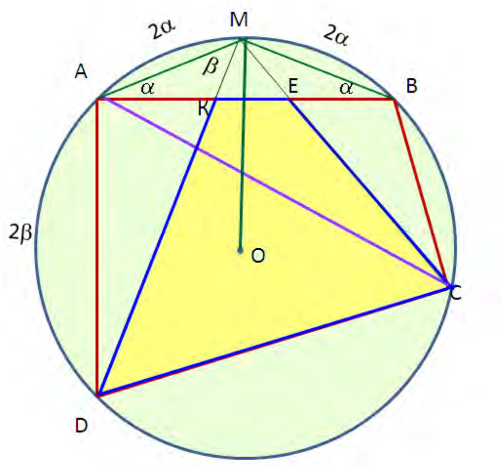


1) Так как AO, BP, CO и DO – биссектрисы углов A, B, C и D, то ∠AOB = ∠COD = 90°.
2) OP и OE – высоты в прямоугольных треугольниках, опущенные из вершины прямого угла на гипотенузу. Тогда, по свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике имеем:
$AP \cdot PB = r^2$ и $DE \cdot EC = r^2$, т.е. $AP \cdot PB = DE \cdot EC$
или $AM \cdot KB = DM \cdot KC$;
$\frac{AM}{DM} = \frac{CK}{KB}$ или AM : MD = CK : KB ч.т.д.

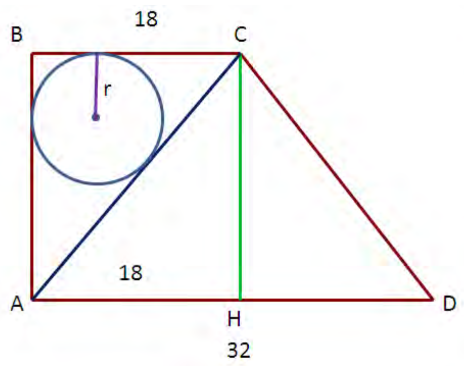
4.4.15. (ЮФМЛ)На окружности лежат четыре точки A, B, C, D, в указанном порядке. Точка M середина дуги AB, K – точка пересечения хорд AB и CD, E – точка пересечения хорд AB и MC. Докажите, что около четырёхугольника CDKE можно описать окружность.

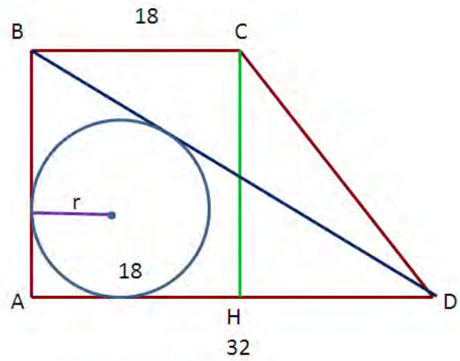
Четырехугольник CDKE вписан в окружность, тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°. Достаточно доказать, что сумма любых двух противоположных углов равна 180°.

Решение:
1) Так как M – середина дуги AB, то OM⊥AB и ∠MAB = ∠MBA = α, тогда ∪AM = ∪MB = 2α;
2)Пусть ∠AMD = β, тогда ∪ AD = 2β. Получили, что ∠MCD = ∠MCA + ∠ACD = α + β.
3) Из ΔAMK имеем: ∠AKM = ∠EKD = 180°- (α + β).
4) ∠ECD + ∠EKD = 180°- (α + β) + (α + β) = 180°.
Около четырёхугольника CDKE можно описать окружность.



4.4.16. (ТВ № 15 2012 от А.Л.) В прямоугольной трапеции с основаниями 18 и 32 тангенс острого угла равен $\frac{12}{7}$. Найдите радиус окружности, касающейся одного из оснований, меньше боковой стороны и диагонали трапеции.
Решение
AH = 18, HD = 32 – 18 = 14, tg $\angle D = \frac{CH}{HD} = \frac{CH}{14} = \frac{12}{7}$, CH = 24.





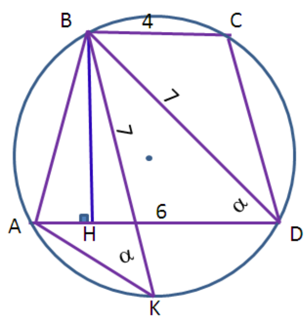
AC = $\sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{24^2+18^2} = 30$; $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AB\cdot BC}{AB+BC+AC} = \frac{24\cdot 18}{24+18+30} = \frac{24\cdot 18}{72} = 6$.

2 случай: AD = 32, AB = 24, BD = $\sqrt{AB^2+AD^2} = \sqrt{24^2+32^2} = 40$;

$r = \frac{S_{ABD}}{p} = \frac{AB\cdot AD}{AB+AD+BD} = \frac{24\cdot 32}{24+32+40} = \frac{24\cdot 32}{96} = 8$.

Ответ: 6 или 8

4.4.17. (ТВ№11-2013 от А.Л.) Трапеция ABCD с основаниями AD = 6 и BC = 4 и диагональю BD = 7 вписана в окружность. На окружности взята точка K, отличная от точки D так, что BK=7. Найдите длину отрезка AK.



Решение: (1 способ)

1) Так как трапеция вписана, то AB = CD.
Тогда AH = (AD – AB) : 2 = 1, HD = 5,
BH = $\sqrt{7^2-5^2} = \sqrt{24}$, AB = 5. $\angle BDA = \angle BKA = \alpha$,
$\cos\alpha = \frac{HD}{BD} = \frac{5}{7}$.

2) Из ΔABK: $AB^2 = BK^2 + AK^2 - 2\cdot BK\cdot AK\cdot \cos\alpha$.
$25 = 49 + x^2 - 2\cdot 7x\cdot\frac{5}{7}$, $x^2 - 10x + 24 = 0$, $x = 6$, $x = 4$.

При x = AK = 6, получим $\Delta ABK = \Delta ABD$ со сторонами 5, 6 и 7, то есть $\angle BAD = \angle BAK$, что противоречит условию «*точка K, отличная от точки D*».

Ответ: 4.

2 способ

1)Трапеция ABCD- равнобедренная, т.к. дуги AB и CD заключенные между параллельными прямыми BC и AD равны. То есть AB = CD.

2)$\angle BKA = \angle DBC$ – как вписанные углы опирающиеся на равные дуги; ∪BAK =∪ BCD, так как углы при основании равнобедренного треугольника BDK опираются на эти дуги ⇒ ∪ AK =∪ BC, а следовательно и $\angle ABK = \angle BDC$, а

Δ ABK = Δ BDC по двум сторонам и углу между ними.

Тогда AK = BC = 4.

Ответ: 4

4.4.18. (ТВ№25-2013, А. Л.) В окружность радиуса $\sqrt{10}$ вписана трапеция с основаниями 2 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

Решение:

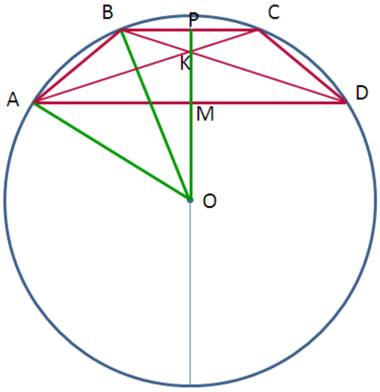


Рис.1

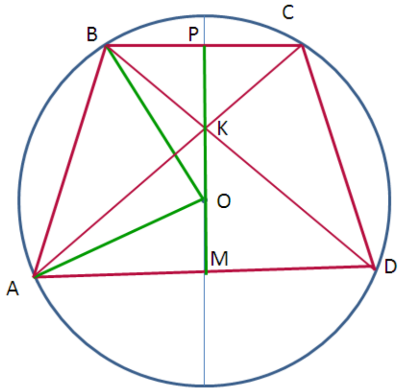


Рис.2

OP = $\sqrt{OB^2 - BP^2} = \sqrt{10-1} = 3$; OM = $\sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}$;

Рис.1: MP = OP – OM = 3 - $\sqrt{6}$;

Пусть KM= x, KP = 3 - $\sqrt{6}$ - x; Так как ΔAKD ~ ΔBKC, то $\frac{AD}{BC} = \frac{KM}{KP}$; $\frac{4}{2} = \frac{x}{3-\sqrt{6}-x}$; x = $\frac{6-2\sqrt{6}}{3}$; OK = KM + OM = $\frac{6-2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{6} = \frac{6+\sqrt{6}}{3}$.

Рис.2: MP = OP + OM = 3 + $\sqrt{6}$;

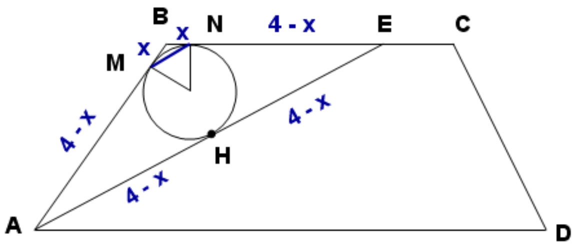
Пусть KM= x, KP = 3 + $\sqrt{6}$ - x; Так как ΔAKD ~ ΔBKC, то $\frac{AD}{BC} = \frac{KM}{KP}$; $\frac{4}{2} = \frac{x}{3+\sqrt{6}-x}$; x = $\frac{6+2\sqrt{6}}{3}$; OK = KM - OM = $\frac{6+2\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} = \frac{6-\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$; $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$.

4.4.19. Прямая AE является биссектрисой угла BAD трапеции ABCD. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Хорда MN = 2. Вычислить угол MON , если AB = 4.

Решение:

1) AE - биссектриса, тогда ∠BAE = ∠EAD, а ∠BEA = ∠EAD как накрест лежащие углы при параллельных AD и BC и секущей AE ⇒ ∠BAE = ∠BEA, ΔABE – равнобедренны, AB = BE



2)Так как окружность вписана в треугольник, то отрезки касательных прямых равны, то есть BM = BN = x, AM = AH = 4 – x, NE = EH = 4 – x.

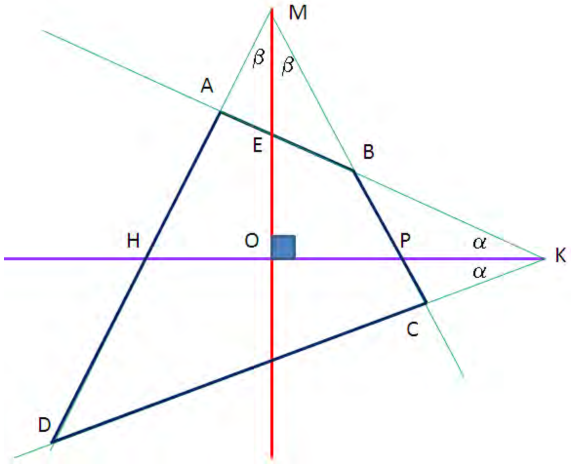
3) ΔBMN ~ Δ BAE, тогда $\frac{MN}{AE} = \frac{BM}{AB}$,

$\frac{2}{8-2x} = \frac{x}{4}$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, x = 2,

то есть ΔBMN - равносторонний ⇒ ∠MBN = 60°, а ∠ MON = 120°.

Ответ: 120°.

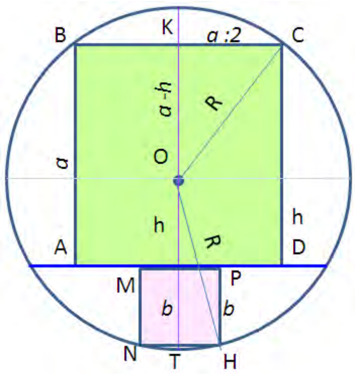
4.4.20 .(ЮФМЛ) Биссектрисы двух углов перпендикулярны, а стороны одного из углов пересекают стороны другого угла в четырех различных точках. Доказать, что все эти точки лежат на одной окружности.



Решение:
Четырехугольник ABCD вписан в окружность, тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°.
Так как сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°, достаточно доказать, что сумма любых двух противоположных углов равна 180°.
Решение:
Найдем величины углов A и C:
1)$\angle OEK = \angle MEA = 90° - \alpha$; $\Rightarrow$
$\angle MAE = 180° - (\beta + 90° - \alpha) = 90° - \beta + \alpha$, а
$\angle BAD = 90° + \beta - \alpha$.
2) $\angle MPO = \angle KBC = 90° - \beta$;
$\angle KCP = 90° - \alpha + \beta$, а $\angle BCD = 90° + \alpha - \beta$.
Тогда $\angle BAD + \angle BCD = 90° + \alpha - \beta + 90° + \beta - \alpha = 180°$. Следовательно точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

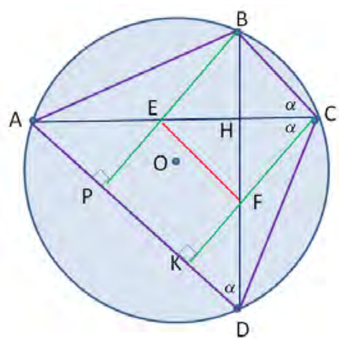
4.4.21. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Хорда окружности удалена от центра на расстоянии h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие – на хорде. Чему равна разность длин сторон квадратов?

Решение:
1)Пусть сторона квадрата ABCD равна a, а квадрата MNHP – b. Тогда OK = a – h, KC = $\frac{a}{2}$, OC = R. $R^2 = (a - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $R^2 = a^2 - 2ah + h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)$;
$R^2 = \frac{5a^2}{4} - 2ah + h^2$.
2) OT = h + b; TH = $\frac{b}{2}$; OH = R; $R^2 = (b + h)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$; $R^2 = b^2 + 2bh + h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$; $R^2 = \frac{5b^2}{4} + 2bh + h^2$.
3) $\frac{5a^2}{4} - 2ah + h^2 = \frac{5b^2}{4} + 2bh + h^2$; $2h(a + b) - \frac{5}{4}(a - b)(a + b) = 0$. Так как $a + b \neq 0$, то $2h = \frac{5}{4}(a - b)$, отсюда $a - b = \frac{8}{5}h$ Ответ: $\frac{8}{5}h$.



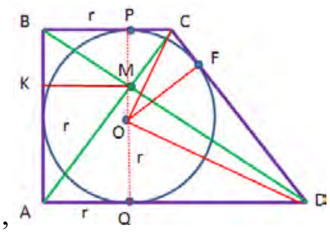
4.4.22. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F сотттветственно. Известно, что BC = 1. Найдите EF.

Решение:
1) Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle ADB = \alpha$, как угол опирающийся на ту же дугу AB. В ΔBCH $\angle CBH = 90° - \alpha$, а в ΔBPD $\angle DBP = 90° - \alpha$, а $\angle AEH = \alpha$. То есть ΔBCH – равнобедренный, BC = BE и высота BH – медиана или CH = HE.
2) AC $\perp$ BD стороне $\angle BDA$, а KC $\perp$ DA тогда $\angle BDA = \angle ACD = \alpha$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Тогда $\angle CFB = 90° - \alpha$, а ΔBPF – равнобедренный, BC = CF и высота CH – медиана или DH = HF.
3) Диагонали четырёхугольника BCFE взаимно перпендикулярны и Точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ BCFE – ромб, тогда FE = 1.
Ответ: 1.



4.4.23. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Около окружности описана трапеция ABCD, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M – точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S. Найдите радиус окружности.

Решение:



1 способ: Пусть $\angle AMB = \angle CMD = \alpha$, а $AD = a$, $BC = b$.

1)Так как $\Delta AMD \sim \Delta BMC \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB}$, тогда $AM \cdot BM = DM \cdot MC$ или $\frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} DM \cdot CM \cdot \sin\alpha = S$. То есть $S_{DMC} = S_{AMB} = S$.

2)Пусть P, F и Q – точки касания окружности и сторон BC, CD и DA. Тогда $PC = CF = b - r$, $QD = DF = a - r$. ΔCOD – прямоугольный, $\angle CMD = 90°$, по свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике имеем: $OF^2 = FD \cdot CF$ или $r^2 = (a - r)(b - r)$, $r = \frac{ab}{a+b}$.

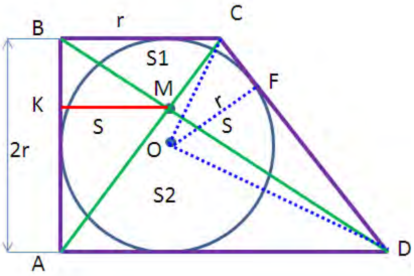
3) Построим $MK \perp AB$, тогда $\Delta ABC \sim \Delta AMK$, $\frac{BC}{KM} = \frac{AC}{AM}$, $KM = \frac{BC \cdot AM}{AC} = \frac{b \cdot AM}{AC}$ $(*)$. Найдём отношение $\frac{AM}{AC}$:

Из подобия $\Delta AMD \sim \Delta BMC \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{b}{a}$, $\frac{CM}{AM} = \frac{AC - AM}{AM} = \frac{AC}{AM} - 1$, $\frac{AC}{AM} - 1 = \frac{b}{a}$, $\frac{AC}{AM} = \frac{a + b}{a}$ или $\frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+b}$.

Подставим значение $\frac{AM}{AC}$ в $(*)$ и получим, что $KM = \frac{b \cdot a}{a+b} = r$.

4) $S = S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r$, $S = r^2$, $r = \sqrt{S}$.

Ответ: $\sqrt{S}$.



2 способ: Пусть $AD = a$, $BC = b$.

1) Так как $\Delta AMD \sim \Delta BMC \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB} = \frac{a}{b}$, тогда $AM \cdot BM = DM \cdot MC$ или $\frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} DM \cdot CM \cdot \sin\alpha = S$. То есть $S_{DMC} = S_{AMB} = S$.

2) Тусть $S_{BMC} = S_1$, а $S_{AMD} = S_2$. $S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot 2r$ или $S_{тр} = 2S + S_1 + S_2$.

$\frac{S}{S_1} = \frac{AM}{MC} = \frac{a}{b}$, $S_1 = \frac{Sb}{a}$; $\frac{S}{S_2} = \frac{CM}{MA} = \frac{b}{a}$, $S_2 = \frac{Sa}{b}$;

$S_{тр} = 2S + \frac{Sb}{a} + \frac{Sa}{b} = S\,\frac{2ab + b^2 + a^2}{ab} = S\,\frac{(a+b)^2}{ab}$;

3) $S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = (a + b) \cdot r$; $(a + b) \cdot r = S\,\frac{(a+b)^2}{ab}$; $r = S \cdot \frac{a+b}{ab}$. Так как $S = \frac{1}{2} AB \cdot KM = \frac{1}{2} 2r \cdot KM = r \cdot KM$, то $r = r \cdot KM \cdot \frac{a+b}{ab}$, тогда $KM = \frac{b \cdot a}{a+b}$.

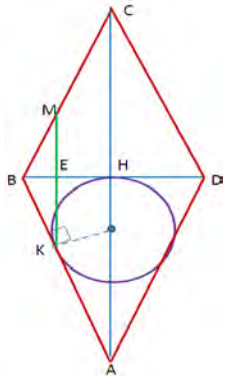
4) ΔCOD – прямоугольный, OC и DO – Биссектриссы внутренних односторонних углов при $AD \parallel BC$ и секущей $CD \Rightarrow \angle OCD + \angle ODC = 90°$, тогда $\angle COD = 90°$. $OF = r$, $r \perp CD$.

Тогда $r^2 = FD \cdot CF = (a - r)(b - r)$; $r = \frac{b \cdot a}{a+b} = KM$.

5) $S = S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r$, $S = r^2$, $r = \sqrt{S}$.

Ответ: $\sqrt{S}$.

4.4.24. (И.В. Ященко, А.С. Шестаков 30 в ГИА2013) Площадь ромба ABCD равна 18. В треугольник ABD вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая, параллельная диагонали AC и отсекающая от ромба треугольник площади 1. Найдите синус угла BAC.

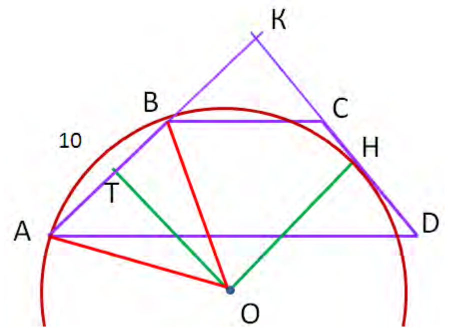


Решение:

1)$\Delta ABC \sim \Delta KBM \Rightarrow S_{ABC} : S_{KBM} = 9 : 1 \Rightarrow AB : BK = 3 : 1 = HB : BE$.
2)По свойству касательных, проведенных из одной точки ВК = ВН
3) $\sin\angle BAC = \frac{BH}{AB} = \frac{BK}{AB} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

4.4.25. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецова, 20 вар., 2013)
В трапеции основания AD и BC равны соответственно 36 и 12, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точка A и B и касающейся прямой CD, если AB = 10.



Решение:
1)Так как сумма углов при основании AD равна 90°, то $\angle K = 90°$.
H – точка касания, тогда $OH \perp CD$. Построим $OT \perp AB$, тогда OHTK – прямоугольник, OH = TK.
2) ΔOAB – равнобедренный, OA = OB = R. OT высота, а следоваельно и медиана. AB = 10, TB = 5.
3) $\Delta BKC \sim \Delta AKD$, $\frac{AD}{BC} = \frac{AK}{BK}$; $\frac{36}{12} = \frac{x}{x-10}$; 24x= 360, x = 15, AK = 15, BK = 15 – 10 = 5, TK = 5 + 5 = 10. То есть R = OH = TK = 10.

Ответ: 10.

4.4.26. (Л.О.Рослова, Л.В. Кузнецова, 20 вар., 2013)
В трапеции основания AD и BC равны соответственно 7 и 124, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точка A и B и касающейся прямой CD, если AB = 8.
Ответ: 12.

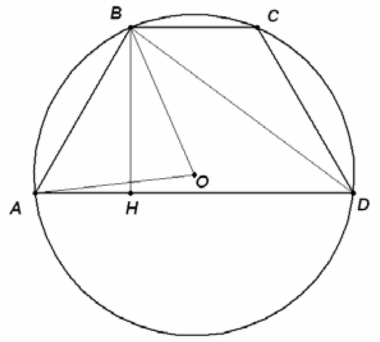
4.5. Окружность и четырехугольник на ЕГЭ

Взаимное расположение окружности и четырехугольника:

- *Трапеция вписана в некую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*
- *Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.*
- *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*
- *Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны.*

4.5.1. (2010) Трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана в окружность с центром *O*. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

Решение: 1 способ



1) Пусть угол AOB равен α, тогда $\angle BDA = \dfrac{\alpha}{2}$. Так как средняя линия равна 3, то DH = 3.

2) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{BH}{HD}$, BH = HD · $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\dfrac{4}{5}$;

3) Если α - острый угол, то $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, тогда

$$BH = 3\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1;$$

4) Если α - тупой угол, то $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, тогда $BH = 3\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{3\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 9$;

Решение: 2 способ

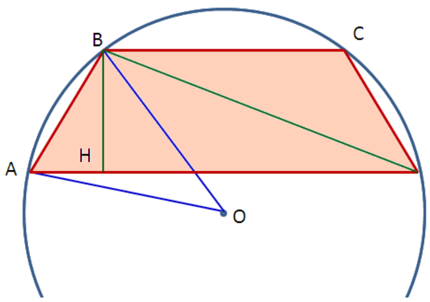


Рис.1

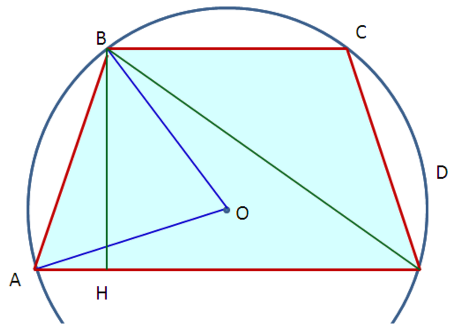


Рис. 2

Рис. 1:

1 случай, O ∉ ABCD.

$S_{ТР} = \frac{AD\cdot BH}{2} + \frac{BC\cdot BH}{2} = \frac{BH(AD+BC)}{2} = 3\,BH = 3\,h.$ $S_{ТР} = \frac{AD\cdot BD\cdot AB}{4R} + \frac{BC\cdot BD\cdot AB}{4R} = \frac{BD\cdot AB\,(AD+BC)}{4R} = \frac{3BD\cdot AB}{2R}.$

По Теореме косинусав, из ΔABO найдем AB: $AB = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cdot cosO} = R\sqrt{2(1-cosO)} = R\sqrt{0{,}4}.$

$HD = \frac{AD+BC}{2} = 3$; $BD = \sqrt{h^2+9}$; Тогда $S_{ТР} = \frac{3\sqrt{h^2+9}\cdot R\sqrt{0{,}4}}{2R} = \frac{3\sqrt{0{,}4}\cdot\sqrt{h^2+9}}{2}$;

$\frac{3\sqrt{0{,}4}\cdot\sqrt{h^2+9}}{2} = 3\,h$; $0{,}4\cdot(h^2+9) = 4h^2$; h = 1.

Рис. 2:

2 случай, O ∈ ABCD.

$AB = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cdot cosO} = R\sqrt{2(1+cosO)} = R\sqrt{3{,}6}$; $3{,}6\cdot(h^2+9) = 4h^2$; $0{,}9\cdot(h^2+9) = h^2$;
h = 9.

Ответ: 1; 9.

4.5.2. Дана трапеция *ABCD*, основания которой BC = 44, AD = 100, AB = CD = 35. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение:

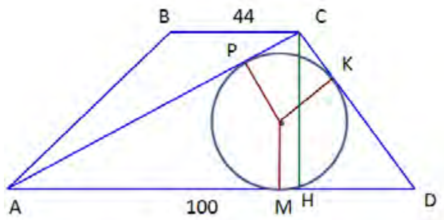


Рис.1

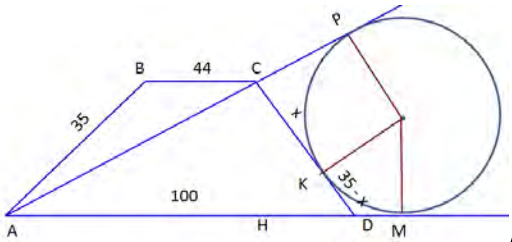


Рис.2

1) Так как трапеция равнобедренная, то АН = 44 + (100 – 44): 2 = 72, из ΔАСН по теореме Пифагора АС = 75.
2)Пусть СК = х, тогда КD = 35 – х; По свойству касательных СК = СР = х, DK = DM = 35 - x.
3)Рис.1: АР = АС – РС = 75 – х; АМ = АD – DМ , так как АР = АМ, то 100 – 35 + х = 65 +х.
Так как АМ = АР, то 75 – х = 65 +х, х = 5.
4) Рис. 2: АР = АС + СР = 75 + х; АМ = АD + DМ = 100 + 35 - х = 135 - х. Получим уравнение:
75 + х = 135 – х, 2х = 60, х = 30.
Ответ: 5; 30.

4.5.3 Дан параллелограмм ABCD, AB = 3, BC = 7, ∠A = 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.
Ответ: $\frac{35\sqrt{3}}{6}$; $8\sqrt{3}$.

4.5.4. С4. (ТВ№30-2013, А. Л.) Длины соседних сторон вписанного в окружность четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найти радиус окружности.
Решение:

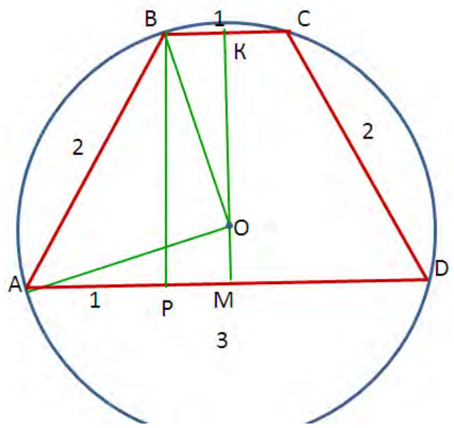


Рис.1

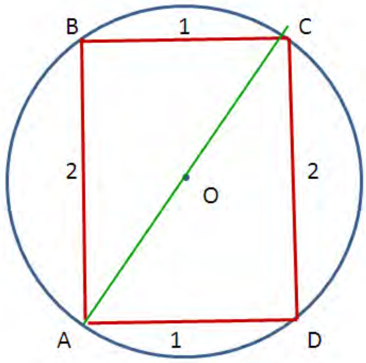
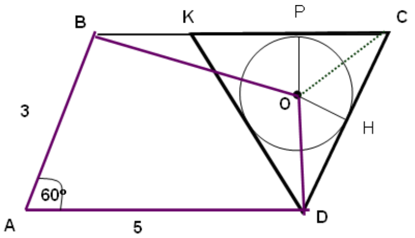


Рис.2

Возможны варианты: стороны равны 1,2, 3, 2 – Рис.1 или 1, 2, 1, 2 – Рис.2.
Рис.1: Получили трапецию ABCD. Высота BP = MK = $\sqrt{3}$;
$AO^2 = AM^2 + OM^2$; $OB^2 = KO^2 + KB^2$; $AO^2 = OB^2 \Rightarrow AM^2 + OM^2 = KO^2 + KB^2$;
$AM^2 - KB^2 = KO^2 - OM^2$; $(1,5 – 0,5)(1,5 + 0,5) = (\sqrt{3} – x - x)(\sqrt{3} - x + x)$; $(\sqrt{3} - 2x)\cdot\sqrt{3} = 2$;
$3 - 2\sqrt{3}x = 2$; $x = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$; Тогда $AO = \sqrt{1{,}5^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.
При условии, что центр окружности находится не внутри трапеции, получим:
$(\sqrt{3} + 2x)\cdot\sqrt{3} = 2$; $x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, что не удовлетворяет условию задачи.
Рис.2: Получаем прямоугольник ABCD, AC = $\sqrt{5}$, тогда радиус AO = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.5.5. (2010 г)Дан параллелограмм ABCD, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

Решение:



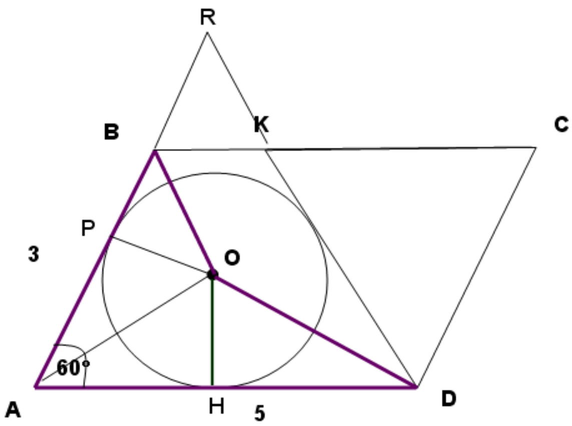
1 случай: пусть окружность касается сторон CD и CK, биссектрисы DK.

1) Так как $\angle C = 60°$, то $\angle ADC = 120°$, а $\angle KDC = 60°$. Тогда Δ CDK – равносторонний, со стороной CK = 3. Радиус вписанной в правильный треугольник окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Площадь выпуклого четырехугольника ABOD найдем как разность площади параллелограмма ABCD и суммы площадей треугольников CDO и COK. То есть

$S_{ABOD} = S_{ABCD} - (S_{DOC} + S_{BOC}) = AD \cdot AB \cdot \sin 60° - (0{,}5 \cdot DC \cdot r + 0{,}5 \cdot BC \cdot r) = .$

$S_{ABOD} = 5 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}5 \cdot (5 + 3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 11 = \dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.



2 случай: пусть окружность касается сторон AD и AR, биссектрисы DK.

1) Так как $\angle A = 60°$, то $\angle ADC = 120°$, а $\angle KDA = 60°$. Тогда Δ ADR – равносторонний, со стороной AD = 5. Радиус вписанной в правильный треугольник окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

2) Площадь четырехугольника ABOD равна сумме площадей треугольников AOD и AOB.

$S_{ABOD} = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{6} + 0{,}5 \cdot 3 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{6} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

4.5.6.С4. .(ТВ № 16 2012 от А.Л.) В параллелограмме острый угол равен 60°, периметр равен 30, а площадь равна $28\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

Решение:

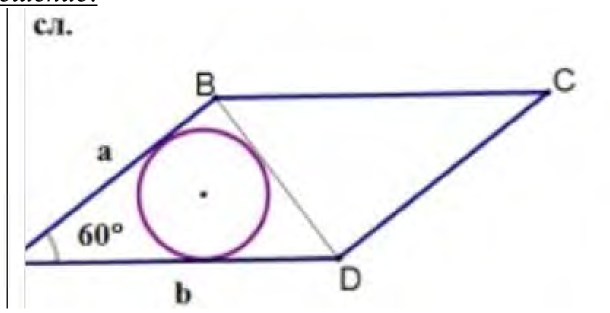


Рис. 1

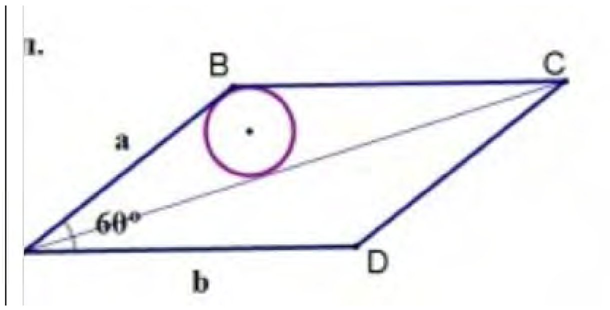


Рис.2

1) Найдем стороны параллелограмма: $S_{пар} = AD \cdot AB \cdot \sin 60° = x\,(15 - x)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$;

$x^2 - 15x + 56 = 0$; $D = 1$, $x = 8$ или $x = 7$, тогда $AB = 7$, $AD = 8$.

2) Найдем диагонали $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\angle A = 64 + 49 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 113 - 56 = 57$;

BD = $\sqrt{57}$;

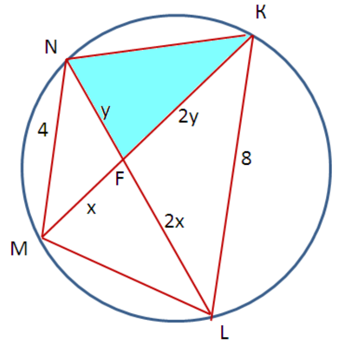
$AC^2 = 64 + 49 + 2\cdot8\cdot7\cdot\frac{1}{2} = 113 + 56 = 169$; AC = 13.

3) Рис.1: $r = \frac{S_{ABD}}{p} = \frac{28\sqrt{3}}{15+\sqrt{57}}$;   Рис.2: $r = \frac{S_{ABc}}{p} = \frac{28\sqrt{3}}{28} = \sqrt{3}$;

Ответ: $\frac{28\sqrt{3}}{15+\sqrt{57}}$; $\sqrt{3}$. (Примечание: даны ответы $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ или $\sqrt{19}$)

4.5.7. С4.(ТВ№8-2013 от А.Л. Четырехугольник KLMN вписан в окружность, его диагонали KM и LN пересекаются в точке F, причем KL=8, MN=4, периметр треугольника MNF равен 9, площадь треугольника KLF равна $3\sqrt{15}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KNF.

Решение:



1) ΔMNF ~ΔKLF по двум углам: ∠MNL = ∠MKL – как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, ∠MFN = ∠KFL - вертикальные. Тогда $S_{MNF} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ (k = 2, k – коэффициент подобия).

2) $P_{MNF} = 9$, x + y = 9 – 4 = 5, x = 5 – y, по формуле Герона

$S_{MNF} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-y\right)\left(\frac{9}{2}-5+y\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

$\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9-2y}{2}\cdot\frac{2y-1}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$; (9 - 2y) (2y – 1) = 15, $y^2 - 5y + 6 = 0$,

$y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

1 случай:

3) y = 2. Тогда $S_{NFK} = \frac{1}{2}\cdot NF\cdot FK\cdot\sin\angle NFK = 4\cdot\sin\angle NFK$. $\sin\angle NFM = \sin\angle NFK = \frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{2}{xy} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$S_{NFK} = 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$.

4) $MN^2 = MF^2 + FN^2 - 2\,MF\cdot FN\cdot\cos\angle NFM$, $\cos\angle NFM = -\frac{1}{4}$, а $\cos\angle NFK = \frac{1}{4}$; По теореме косинусов получим: $NK = \sqrt{4+16-16\cdot\frac{1}{4}} = 4$.   Тогда $R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S} = \frac{2\cdot4\cdot4}{4\cdot\sqrt{15}} = \frac{8\cdot\sqrt{15}}{15}$.

2 случай:

3) y = 3. Тогда $S_{NFK} = \frac{1}{2}\cdot NF\cdot FK\cdot\sin\angle NFK = 4{,}5\cdot\sin\angle NFK$. $\sin\angle NFM = \sin\angle NFK = \frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{2}{xy} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$S_{NFK} = \frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{9\sqrt{15}}{8}$.

4) $\cos\angle NFK = \frac{1}{4}$; По теореме косинусов получим: $NK = \sqrt{9+36-36\cdot\frac{1}{4}} = 6$. Тогда $R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S} = \frac{3\cdot6\cdot6\cdot4}{4\cdot9\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{15}}{15}$; $\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

4.5.8. С4. .(ТВ№9-2013 от А.Л.) В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма ABCD.

Решение:

1 способ:

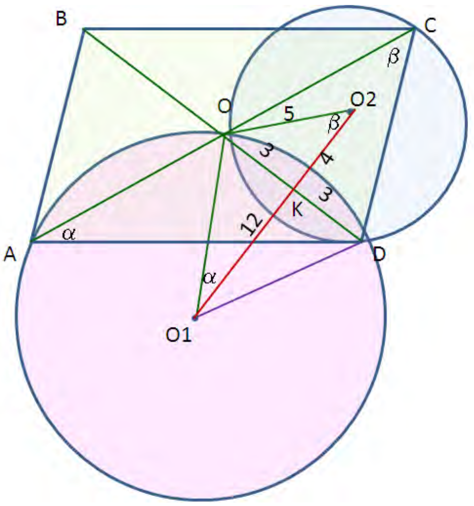


Рис. 1. $\angle D$ – тупой, BD – меньшая диагональ параллелограмма.

1)$\Delta AOB = OCD \Rightarrow OO_2 = 5$, тогда $O_2K = 4$, а $O_1K = 16 - 4 = 12$. По теореме Пифагора

$OO_1 = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$.

2)Пусть $\angle OAD = \alpha$, а $\angle OCD = \beta$ тогда $\angle OO_1D = 2\alpha$, а $\angle OO_1K = \alpha$;$\angle OO_2D = 2\beta$, а $\angle OO_2K = \beta$;

Тогда $\sin\alpha = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\mathbf{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}}$, тогда $\mathbf{\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}}$, **а** $\mathbf{\sin\beta = \frac{3}{5}}$, тогда $\mathbf{\cos\beta = \frac{4}{5}}$.

3) $\angle D = 180° - (\alpha + \beta)$,

Рис.1

$\sin\angle D = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{16}{5\sqrt{17}} = \frac{16\sqrt{17}}{85}$, $\cos\angle D = -\frac{13\sqrt{17}}{85}$

4) Пусть $AD = a$, $CD = b$. Из ΔACD по теореме синусов получим $\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha}$, $\frac{5a}{3} = \frac{b\sqrt{17}}{1}$, $\mathbf{b = \frac{5a}{3\sqrt{17}}}$.

$\cos\angle A = \cos(180° - \angle D) = -\cos\angle D = \frac{13\sqrt{17}}{85}$, т.е. $\mathbf{\cos\angle A = \frac{13\sqrt{17}}{85}}$.

5) Из ΔABD по теореме косинусов получим $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle A$ или

$a^2 + \frac{25a^2}{153} - \frac{10a^2}{3\sqrt{17}}\cdot\frac{13\sqrt{17}}{85} = 144$, $\frac{100a^2}{153} = 144$, $a = \frac{12\sqrt{9\cdot 17}}{10} = \mathbf{\frac{18\sqrt{17}}{5}}$, $b = \frac{5}{3\sqrt{17}}\cdot\frac{18\sqrt{17}}{5} = \mathbf{6}$;

$\mathbf{\sin\angle A = \frac{16\sqrt{17}}{85}}$.

$S = a\,b\cdot\sin\angle A = \frac{18\sqrt{17}}{5}\cdot 6\cdot\frac{16\sqrt{17}}{85} = \mathbf{\frac{1728}{25}}$. $S = \mathbf{\frac{1728}{25}}$.

Рис. 2. $\angle D$ – острый, BD – большая диагональ параллелограмма.

1)$\Delta AOB = OCD \Rightarrow OO_2 = 5$, тогда $O_2K = 4$, а $O_1K = 16 + 4 = 20$. По теореме Пифагора

$OO_1 = \sqrt{20^2 + 3^2} = \sqrt{409}$.

2)Пусть $\angle OAD = \alpha$, а $\angle OCD = \beta$ тогда $\angle OO_1D = 2\alpha$, а $\angle OO_1K = \alpha$ (как углы, опирающиеся на одну дугу);

$\angle OO_2D = (360° - 2\beta)$, а $\angle OO_2K = 180° - \beta$;

Тогда $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{409}} =$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{409}}$, $\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{409}}$, $\sin(180° - \beta) = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$,

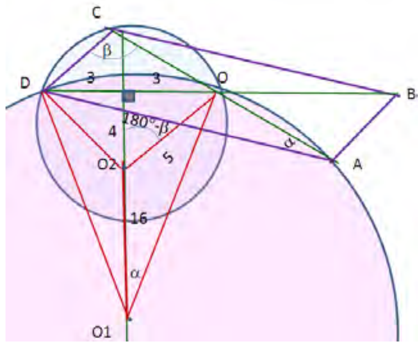


Рис.2

3) $\angle D = 180° - (\alpha + \beta)$, $\sin\angle D = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\frac{3}{\sqrt{409}}\cdot\frac{4}{5} + \frac{20}{\sqrt{409}}\cdot\frac{3}{5} = \mathbf{\frac{48}{5\sqrt{409}}}$ $\mathbf{\sin\angle D = \frac{48}{5\sqrt{409}}}$, $\cos^2\angle D = \frac{10225 - 2304}{25\cdot 409} = \frac{7921}{25\cdot 409}$, $\cos\angle D = \mathbf{\frac{89}{5\sqrt{409}}}$.

4) Пусть $AD = a$, $CD = b$. Из ΔACD по теореме синусов $\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha}$, $\frac{3a}{\sqrt{409}} = \frac{3b}{5}$, $\mathbf{b = \frac{5a}{\sqrt{409}}}$.

$\cos\angle A = \cos(180° - \angle D) = -\cos\angle D = -\frac{89}{5\sqrt{409}}$, $\mathbf{\cos\angle A = -\frac{89}{5\sqrt{409}}}$.

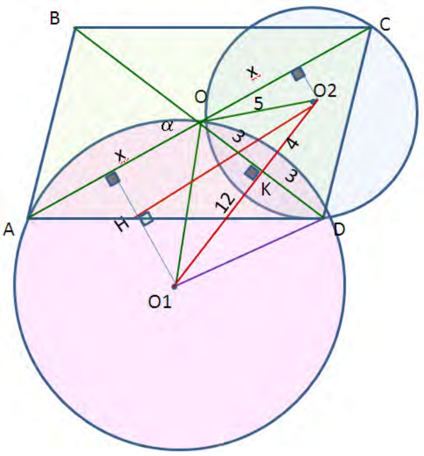
5) Из ΔABD по теореме косинусов получим $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle A$

$a^2 + \frac{25a^2}{409} + \frac{10a^2}{\sqrt{409}}\cdot\mathbf{\frac{89}{5\sqrt{409}}} = 144$ $\frac{434a^2 + 178\,a^2}{409} = 144$, $\frac{612a^2}{409} = 144$, $a = \frac{12\sqrt{409}}{\sqrt{612}}$.

$b = \frac{5}{\sqrt{409}}\cdot\frac{12\sqrt{409}}{\sqrt{612}} = \frac{60}{\sqrt{612}}$, $S = a\,b\cdot\sin\angle D = \frac{12\sqrt{409}}{\sqrt{612}}\cdot\frac{60}{\sqrt{612}}\cdot\frac{48}{5\sqrt{409}} = \frac{12\cdot 60\cdot 48}{36\cdot 17\cdot 5} = \frac{4\cdot 48}{17} = \frac{192}{17}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{1728}{25}}$; $\frac{192}{17}$.

3 способ: (самый креативный и короткий).



1)$\Delta AOB = OCD \Rightarrow OO_2 = 5$, тогда $O_2K = 4$, а $O_1K = 16 - 4 = 12$. По теореме Пифагора $OO_1 = \sqrt{12^2+3^2} = 3\sqrt{17}$.

2) Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOD = 180° - \alpha$, тогда $\angle HO_1K = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Из ΔHO_1O_2

$\sin\angle O_1 = \frac{O_2H}{O_2O_1} = \frac{x}{16}$, $\sin\alpha = \frac{x}{16}$, **$x = 16\sin\alpha$.**

3)По теореме синусов $\frac{AD}{\sin\angle AOD} = 2R$, $\frac{AD}{\sin\alpha} = 6\sqrt{17}$,

$AD = 6\sqrt{17}\sin\alpha$; $CD = 10\sin\alpha$.

4) По теореме косинусов

$CD^2 = OD^2 + OC^2 - 2\cdot OC\cdot OD\cdot\cos\alpha$.

$100\sin^2\alpha = 36 + 256\sin^2\alpha = 12\cdot 16\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

$16\,tg^2\alpha - 16\,tg\,\alpha + 3 = 0$, $D_1 = 64 - 48 = 16$.

$tg\,\alpha = \frac{3}{4}$, $tg\,\alpha = \frac{1}{4}$, тогда $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$; $\sin\alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ и

$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

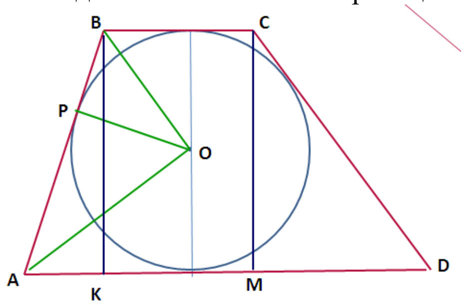
5) $S = x\cdot BD\cdot\sin\alpha = 16\cdot 12\cdot\sin^2\alpha$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $S = 16\cdot 12\cdot\frac{9}{25} = \frac{1728}{25}$.

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $S = 16\cdot 12\cdot\frac{1}{17} = \frac{192}{17}$.

Ответ: $\frac{1728}{25}$ или $\frac{192}{17}$.

4.5.9. С4. (ТВ№25-2013, А. Л.) Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания этой трапеции.

1 случай:



1)$AB = 8 + 18 = 26$. $P = 112$,

$AB + CD = AD + BC = 112 : 2 = 56, \Rightarrow CD = 56 - 26 = 30$.

2) Так как AO и BO – биссектрисы внутренних односторонних углов, то $\angle AOB = 90°$. $PO \perp AB, \Rightarrow$

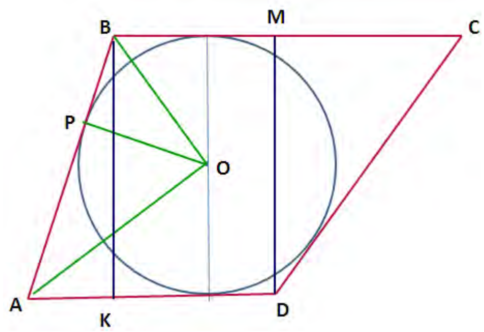
$PO = \sqrt{AP\cdot PB} = \sqrt{18\cdot 8} = 3\cdot 4 = 12$. То есть $r = 12$, радиус вписанной окружности.

3)$BK = 2r = 24$, $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{2\cdot 50} = 10$;

$MD = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6\cdot 54} = 18$.

4) $AD - BC = AK + MD = 10 + 18 = 28$; $AD + BC = 56$; $2AD = 28 + 56 = 84$, $AD = 42$; $BC = 56 - 42 = 14$.

2 случай:



$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{2\cdot 50} = 10$.

$MC = \sqrt{CD^2 - DM^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6\cdot 54} = 18$.

$BM = x$; $AK + x + x + MC = AD + BC = 56$;

$28 + 2x = 56$, $2x = 28$, $x = 14$, $AD = 14 + 10 = 24$;

$BC = 14 + 18 = 32$.

Ответ: 42 и 14; 24 и 32.